*Sokan még Nyugat-Európában is "Maya" néven ismerik ezt, az egyik talán legősibb táblajátékot.
A tájékozottabbak persze tudják, hogy ennek az afrikai eredetű játéknak nincs köze Dél-Amerika indiánjaihoz.
Arról viszont csak kevesen tudnak, hogy a félreértelmezhető fantázianév magyar gyártó,
a Plastolus Kft. (akkor még szövetkezet) reklámfogása volt (fröccsöntött design, maradék kék festékkel…),
sokban hasonló hatással, mint a"csillag-halma/kínai-sakk" keveredést előidéző német termékbevezető reklámmal.*

MANCALÁK

Napjainkban a mancalákat szerte a világban száznál is több néven, más-más játékszabályokkal űzik és megtalálható a jobb internetes játszóhelyeken is. Az adott játék szabályai (a rengeteg változat keveredése miatt) első pillantásra ijesztően bonyolultnak tűnnek. Jóllehet, egy, már megismert egyszerű alapjátékhoz csupán csak az adott variáns újra-következési és ütési szabályait kell értelmeznünk...

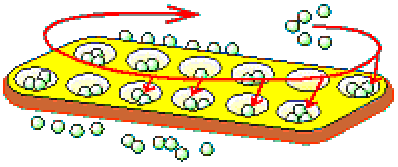
Sokkal részletesebben láthatod a terebes.hu-n Nyiredy Barbara és Tokaji Zsolt: **>>> MANCALA**
(Ha elromlana a forrás-link…, a Játéktanra **>>> ide leloptam**)

Az alapjáték:

No most, a sok százból melyiket is tekintsük alapjátéknak? Mondjuk inkább azt, hogy van ilyen is, lehet így is:

A tábla két hosszanti oldalán, egymással szemben a két játékos. A táblán , mindkét játékos oldalán, 6-6 db „gödör” (*rekesz*). Kezdéskor, a gödrökben 4-4 db „vetőmag” (egymástól semmiben sem különböző bábuk).

A nyitó játékos kiveszi a felé eső (***saját***) sorának egy tetszőlegesen választott gödréből mind a 4 db vetőmagot és az üres gödröt követőkbe -pl.: az óramutató járásával megegyező (vagy más változatoknál ellenkező) irányban- egyenként "elveti" (***szórja***) azokat.



Ezután, hasonlóan lép a másik játékos (persze ő is csak a saját gödreiből választhat szórásra és a körbe-osztás iránya sem változhat).
Majd újra az első játékos szór és így tovább felváltva… (Lásd az ábrán.)

Minden lépés befejezéseként, a lépő játékos a saját gödreiből "kiüresíti" mindazokat, amelyekben a lépésének következményeként páros lett a vetőmagok db-száma.

Amikor az összes gödör kiürült, összeszámolják a kivett magjaikat és akinek több jutott, az lett a parti győztese. A praktikusan kialakított játék-készletek további egy-egy, a játékosok jobb keze felé eső, gödröt (***saját gyűjtőt***) is tartalmaznak, melybe a kiszedett magokat (nyereségeiket) gyűjtögethetik...

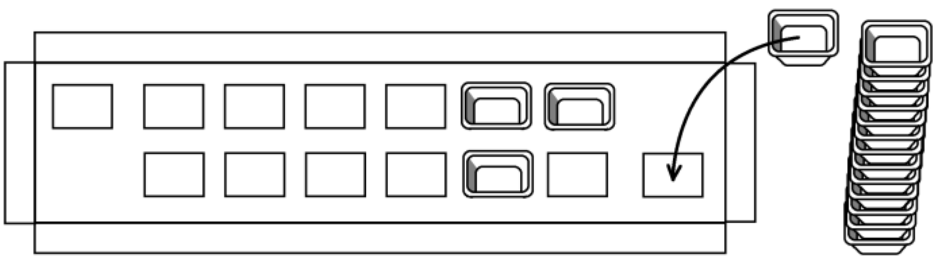
Ez, így nem túl bonyolult és már a legkisebbek is hamar megkedvelik az osztozkodós-rakosgatós technikáját.

A gyakorlottabb játékosok pedig, sok-sok változat további ötletei közül választhatnak.

Kicsiknek is, (akár már dobókockásokra érett ovisoknak is), de a felnőtt játékos-hajlamúaknak is érdemes elkészíteni, mert a szabály-változatok között még a profi matekosok is találnak érdekeseket… ’ésha…’ ’…ésha’ már annyi féle szabály-variáns létezik, akkor miért ne találhatnánk ki hozzá a magunk változatát is… ☺

Ahogy magam is elkészítettem:

Gyűjts össze 14 db pl. joghurtos tálkát
(a laposabb fajtából) és ragaszd be őket
egy kartonlap méretre vágott lyukaiba…
Hajtsd le a karton széleit,
esetleg alulról bordázd is alá stabilan…
(Vagy alakítsd ki pl. tojástartókból
az ábra szerinti játéktáblát…)



Aztán ugye, hozzá még: bab, v. borsó, v. makk, v. mogyoró, v. kávészem, v. hecsedli-bogyó… ,
bármi olyan „magnak-való”, ami könnyedén egy mozdulattal kimarkolható és a színe (jól számlálhatóan) elüt a rekeszek színétől…

Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

A legkisebb, szívesen rakosgatós picuriknak…

Iskolaérettekkel, már többnyire jól játszható ***a bevezetőben mutatott alapjáték*** *is, de a picurkákkal még csak óvatosan…, a legegyszerűbb szabályokkal, az együtt-játék váltakozó rakosgatására figyelve, a „várj a sorodra, figyeld csak, hogy én hogyan csinálom”…*

„Segítek apának” Már az is nagyon jó játék lehet, ha a mancala-tábla rekeszeibe szétválogathatják a barkácsoló apa összeömlesztett csavarjait. (A rekeszek jól használhatók különféle szortírozásra, csoportosításokra. Kagylók kavicsok, gyöngyfűzők, borsószem, kávészem, kukorica, lego-elemek…)

Aztán, Pl. cseresznyeérés idején, a rekeszenkénti 3-szemes kezdőállásból indulva, a verseny közben azonnali lehet a jó (nyereséget hozó) lépés jutalma… úgy, hogy már csak a begyűjtött-elrabolt csenyi magja kerül bele a gyűjtőbe.

Legegyszerűbb talán az **„Elcsenek egy csenyit”** picur-vari, amelyben az a szabály, hogy amikor a szórás utolsója olyan saját rekeszben landol, aminek még ezzel is kevesebb lesz a tartalma, mint a szemköztinek, akkor az átellenes rekeszből egy szem elcsenhető. *(„Minek oda annyi sok?”)*

Játszható akár dobókockával is, (a „kockával kidobott” sorszámú rekeszből kell szórni, de a szórás iránya mindegyik lépésben szabadon megválasztható). Úgy még érdekesebb, ha… (ha a szórásban útba esik, akkor) kötelező a versenytárs gyűjtőjébe is „vámot” fizetni.

Dobókockás vezérléssel izgalmas lehet a **„Vezérek versenyfutása”**. Induláskor minden rekeszben 2-2 db katona és átlósan szemben a 6. (és az 1.) rekeszben még 1-1 db vezér.
(Tehát az egyik játékosé pl. piros, a másiké kék, és mindkettő ugye a saját gyűjtőtől legtávolabb).
A dobókockával kivetett rekeszt kell szórni, de mindig utolsóként kell lerakni a vezért.
A saját gyűjtőkbe most nem rakunk, de a versenytárs gyűjtőjébe mindig (amikor csak útba esik).
Az nyer, akinek a vezére előbb ér vissza a saját térfelére. Ha a két vezér egy rekeszbe kerül, akkor döntetlen. A partinak akkor is vége, ha egyik vezér az ellenfél gyűjtőjében landol, „csapdába esik” és azonnal veszít. (Ámde, extra nyerő is lehet, ha „várnak” nevezzük, amit sikerült elfoglalni…)

Néhány parti után, biztosan lesznek magunk találta ötleteink is rablási szabályra, versenycélra…

Játék-szabály-varik gyakorlottabbaknak

A legkézenfekvőbb módosítás, hogy (pl. a bevezetőben mutatott alapjátékban) lépésről-lépésre szabadon dönti el a játékos milyen körbejárási irányban osztja le a kiválasztott gödörből kivett köveket, de növelhető a kezdőállásban lévő magok száma is. Pl.: 5-5 esetén a hármas és a kettes tartalmak elrabolhatóságával is jól működik.

Változhat a verseny célja is, amikor addig tart csak a parti, amíg valamelyik játékosnak az összes gödre ki nem ürül (ekkor ő a nyertes), **vagy pl.:** a végelszámoláshoz még elrabolja az ellenfele gödreiben maradt köveket is.

A csalafintább változatokban (pl.: Bantumi) a 6-6 gödörben 4-4 db maggal indul a parti. Magot rabolni most, csak az ellenfél gödréből szabad, de a leosztáskor („szóráskor”) , -ha "útba esik"- , a saját gyűjtőedényünkbe is kell raknunk. Sőt, **ha a gyűjtő edényünkben landol az utolsó magunk, akkor újra mi következünk lépésre.**

Egyes változatokban a magok levételére vonatkozó szabály "megengedő" jellegű. Ha a lépő előnytelennek ítéli, akkor nem köteles mindegyik "**párossá**", vagy "**hármassá**" alakult tartalmú ellenséges gödröt kiüríteni.

(Nem csak a partik gyorsítását célzó) szabály-változatban **a szórásunk utolsó magja is átrakható a saját gyűjtőnkbe, ha valamelyik saját üres gödrünkbe érkezik.**

Nagyon jól versenyezhető ütési szabály: **ha a szórásunk utolsó magja az egyik saját üres gödrünkben landol, akkor a vele szemközti ellenséges gödör tartalmát is elraboljuk.**

Vannak olyan változatok, amelyekben megengedett a lépés elpasszolása, másikakban pedig a lépő játékos köteles megakadályozni (persze csak ha lehetséges), hogy ellenfelének mindegyik gödre kiürüljön.

Az egyes változatok ötletei többnyire egymással is jól kombinálhatók és a partik közben adódhatnak új színesítő, bonyolító ötleteink is. (Persze, a megkezdett parti végéig nem változhat a szabály!)

A játék elején mindig meg kell egyezni, ajánlott vázlatosan le is rögzíteni, hogy milyen változat, milyen ütési szabályai szerint folyik a parti és értelmezni kell -a viták elkerüléséhez- néhány finomító szabályt is:
*Ha pl. egy lépés vetése "körbejár" (előfordulhat, hogy 12-nél több magot kell elvetnie a lépőnek), akkor **az "üresített" gödröt üresen is kell hagynia, azaz vetéskor át kell ugrania...**;*
*Kivétel lehet: **a szemben lévő rekeszt rabolva lesz csak újra üres, ha pont oda ér vissza.***

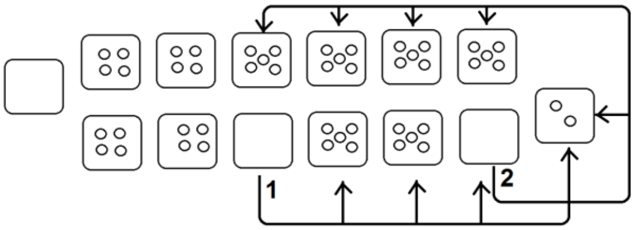
Az MTTE versenyein a többnyire a **„Bantumi”** néven ismertet játszottuk 6-6 rekesszel, 4-4 maggal.

1. Szórás: egyenként, az óramutató járásával ellenkezőleg, a saját gyűjtődbe teszel, ellenfeledébe nem.
2. Mindössze három "hahaha" szabály van:
Ha saját-oldali üresbe kerül az utolsó, akkor az is a gyűjtődbe kerül, sőt:
ha a szembeni rekesz nem üres, akkor annak teljes tartalmát is "elraboltad".
Ha az utolsó lerakottad a saját gyűjtődbe érkezik, akkor újra te következel.
3. Vége a partinak, amikor vagy az alsó, vagy a felső oldal kiürült.
Ekkor, a másik oldal a számolás előtt, még a saját rekeszébe teszi az ő oldalán maradtaka**3. Újra te lépsz**, ha az utolsó lerakottad a gyűjtődbe érkezik.

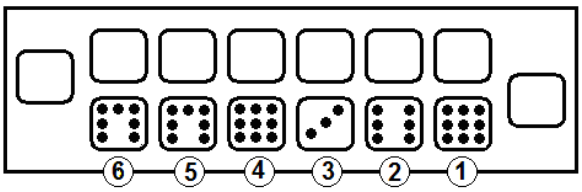
A gyakorlat tapasztalata, hogy ebben a változatban túl nagy előnnyel indulhat a kezdő játékos:
*A Játéktanon, Háló-kapcsolatban, itt, ki is próbálhatod: >>> **BANTUMI a progi ellen***

Az 1. és 2. jelű kezdő-lépések után a másodiknak lépő folyamatosan lépéskényszerben tartható és csak akkor nyerhet, ha a kezdő (irányító-támadó) játékos nagyon gyakorlatlan. (Lásd: Gondolkodási séma, az elágazások előretekintése nélkül.)

Ma már, a kombinatívabb, kevésbé áttekinthető 6-6 köves, vagy profiknak a 8-8 köves, indítást ajánlanám versenyekhez.

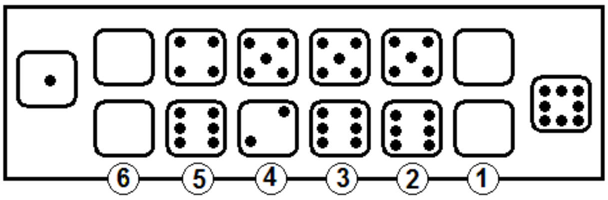


Két ábra, két mankó (egyik a kezdő játékosoknak és egy másik a versenyzésre készülőknek)



Nagyon jó mankó, a rekeszeknek az ábrán látható, az alsó játékos nézőpontjából mutatott, jobbról balra történő sorszámozása: „S”.
Jelölje „M”, az adott rekeszben lévő magok számát!
Ha M-S>12 (hosszabb egy teljes körnél) akkor: ***M*=M-nx12***
Ha **M*=S**, akkor (a saját gyűjtőnkben landolunk) **ismételhetünk**.
Ha **M*<S**, akkor az érkezési rekesz sorszáma az alsó soron **S-M*.**
Ha **0<M*-S<7**, akkor a felső soron **M*-S**,
ha **7<M*-S<12**, akkor az alsó soron **13-M*+S** rekeszben végzünk.

A partik leírásait legegyszerűbb az egyik (javasoltan az alsó) játékos nézőpontjából lejegyezni.
A felrakott kezdő állásból lépésről-lépésre reprodukálható a parti.
Lásd pl. az ábrán (a rekeszenként 4-4 db magos nyitóállásból az:
a4, a1, f6, a6 lépések utáni hadállást.



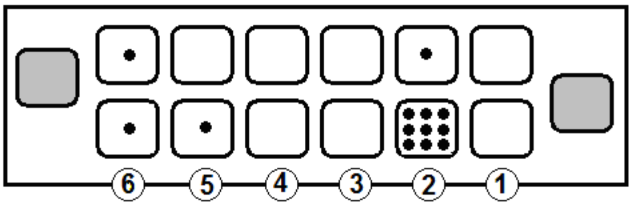
Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

Gondolkodási séma (lépésenként átgondolandó nyerő-taktikák, ajánlott alkalmazásuk prioritásai szerinti **<u>sorrendben</u>**)

Mint minden páros viadalban, minden lépés előtt, a versenytárs helyébe kell képzelnünk magunkat: mi lenne a legelőnyösebb számára az éppen vizsgált „hadállásban”? Támadásban van-e, vagy védekezésben? Az „adu”, a lehetőség, mindkét esetben az én kezemben van, mert most én következek lépésre, és ezzel: ha én vagyok előnyben, akkor még szorosabbra húzhatom a hálót…, ill. az észrevett és felismert közvetlen fenyegetést még elháríthatom.

<u>1./ =>vége lehet-e a partinak már 2-4 lépésben?</u>

Az ellenoldalnak 2 lépése van még, ha az 2. rekeszből indít. (A 6-ból indítva, újra ő következne és nullázná a saját sorát.) Már a végelszámolásra készülve, az a célom, hogy a 2. rekesz 9 db-ját mind megtartsam. Ehhez az kell, hogy még tudjak 3 lépést tenni. Ezért csak a 6. rekeszből indíthatok.

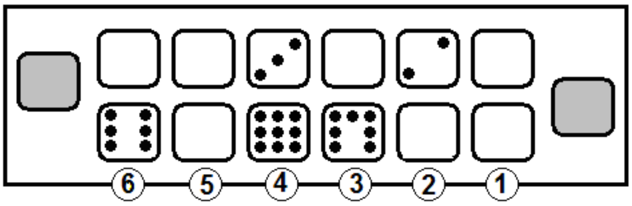


Az 1-re kapott nemleges válasz után a következő kérdés, mennyi nyereséget szerezhetne versenytársam:

<u>2./a =>Ha most a „túloldal” lépne, akkor tudna-e magot rabolni az én oldalamról?</u>

<u>2./b =>Lehet-e olyan figyelmetlen lépésem, amivel ütéshelyzetbe hozom a versenytársamat?</u>

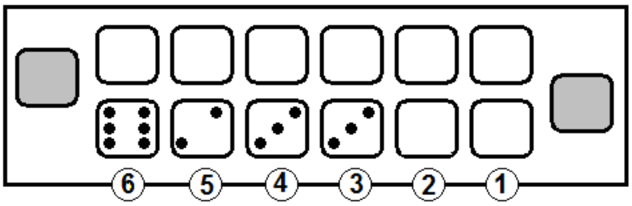
Az ellenoldal a 4. rekeszéből indítva, újra következne és a 2-ből szórva: elrabolhatna 9 magot a 4. rekeszemből. Tehát, hiába csábít a két magot gyűjtőmbe helyező 6. rekeszből történő indítás, legjobb, ha a 3. rekeszemből szórva lehetetlenítem a támadást. (Nagy figyelmetlenség a 4-ből kimenekíteni a 9 db magot, mert ezt követően elrabolható 6 db mag a 6. rekeszemből!)



*Az után vizsgálhatom, hogy szerezhetek-e **<u>többet</u>**, ha már láttam: **<u>mennyit</u>** „arathat” a versenytársam.*

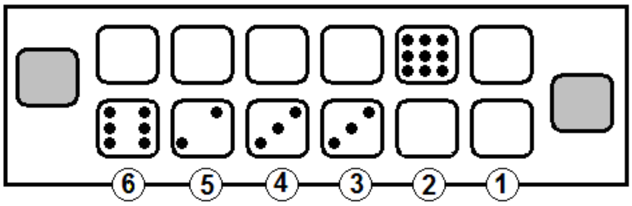
<u>3./a =>van-e ismétléshez vezető lépésem?</u>

Ha több olyan lépés is van, ami ismétléshez vezet, akkor azokból mindig a kisebb sorszámú rekeszt kell választani!!! :-)
A 6. rekeszből indítva, ismétlési helyzetbe hoznánk a 4. rekeszt, de elrontanánk a 3. rekesz ismétlési lehetőségét.
A legtöbb nyereséget (9 magot) eredményező sorrend:
3., 1., 6., 1., 2., 1., 4., 1., 3



<u>3./b Tudok-e rabolni, ill. jól választott ismétléssel lehet-e rablási helyzetbe hozni valamelyik rekeszemet?</u>

Az alsó sor állása megegyezik a 3./a alattival, de nagyon csábít még a felső sor 9 magjának elrabolhatósága is.**(*)**
A maxi nyereséget (11 magot) hozó sorrend, most:
3., 1., 6., 1., 2., 1., 5.



***(*)** Ha igen válasz van 3./a-ra is és 3./b-re is, akkor mi lenne a maxi nyereséget hozó választás, ill. sorrend?*

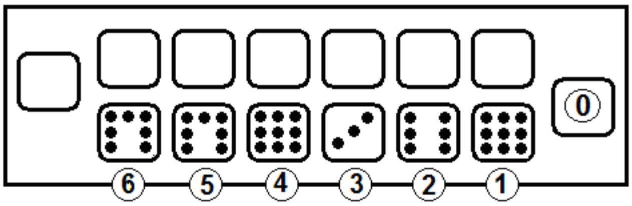
<u>4./ Ha mindegyik válasz (1-től 3-ig) nemleges, akkor tudom-e versenytársam lehetőségeit csökkenteni, (elrontva a saját oldalán alakítgatott állását), vagy az én oldalamon lenne jobb átrendeznem a magokat?</u>

*A 4 magos, 6-rekeszes Bantuminál lépésről-lépésre **<u>valóban „csak” ennyit</u>** gondolnak át a gyakorlottak is? Nem terveznek elágazás-fákat, „ha ő így akkor én úgy…” amik közül aztán kiválaszthatják és megtervezhetik a nyerőágat? Az elsőre határozott „IGEN” a tapasztalatom, a másik kérdésre az, hogy „NEM JELLEMZŐ”. Talán ebben is rejlik ennek játéknak sikere, kedveltsége. A versenyzők lépésről-lépésre az adott állás nyereségének maximalizálására törekednek, azaz lépésről-lépésre egy-egy feladványt adnak játszótársuknak. Már 3-4 lépésváltásra történő előretekintés is ritka kivétel. Tán ezért is terjedt el ilyen sok változata az alapötletnek. Látszólag, mindössze hat (ill. többnyire még kevesebb) lépés-lehetőség közül választhat a soron következő versenyző, de az ismétlések lehetősége miatt, akár 30-40 féle állás is kialakulhat lépésváltásonként. Ebben persze nem egyedi (számos táblás ennél nagyobb elágazást mutat), de a Bantumiban pl. az egyik állás többnyire úgy következik a másikból, hogy a ritkán kiszámíthatatlan sorrend láncolata bármikor megszakítható és egy másik úton lezárható, az adott helyzetben elérendő promt nyereség megszerzéséért.*

☺ Nagylaci (http://jatektan.hu)

Feladatlap (ismétlő kérdések, rejtvényszerűen)

1. Karikázd be minden sorban, hogy az ábrán mutatott magszámokkal hova érkezik a szórás utolsó magja!

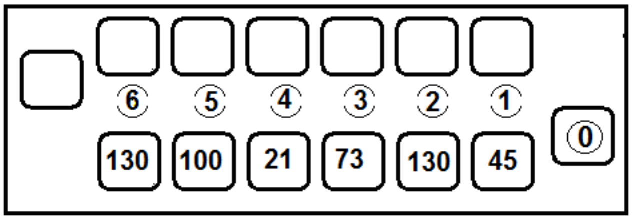


induló rekesz:	alsó sorba érkezik:	felső sorba érkezik:
1	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
2	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
3	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
4	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
5	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

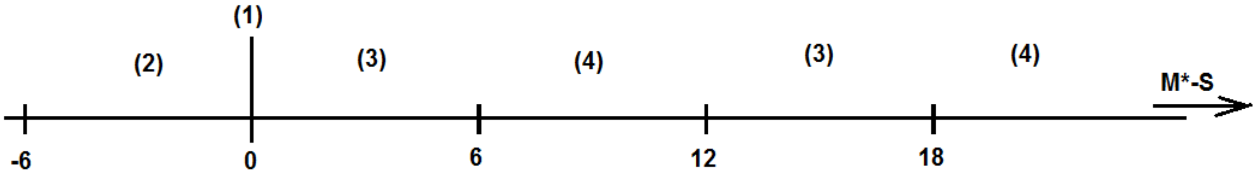
2. Ellenőrizd le a képletek működését!

S az induló rekesz sorszáma (az alsó játékos nézőpontjából) $M^*<13$ az induló „redukált" magszám ($M^*=M-n\times 12$)
Ha $M^*=S$ (1.), akkor (a saját gyűjtőnkben landolunk) ismételhetünk. Ha $M^*<S$, akkor az érkezési rekesz az alsó soron $S-M^*$ (2.)
Ha $0<M^*-S<7$, akkor a felső soron M^*-S (3.), Ha $6<M^*-S<12$, akkor az alsó soron $13-M^*+S$ (4.)rekeszben végzünk.

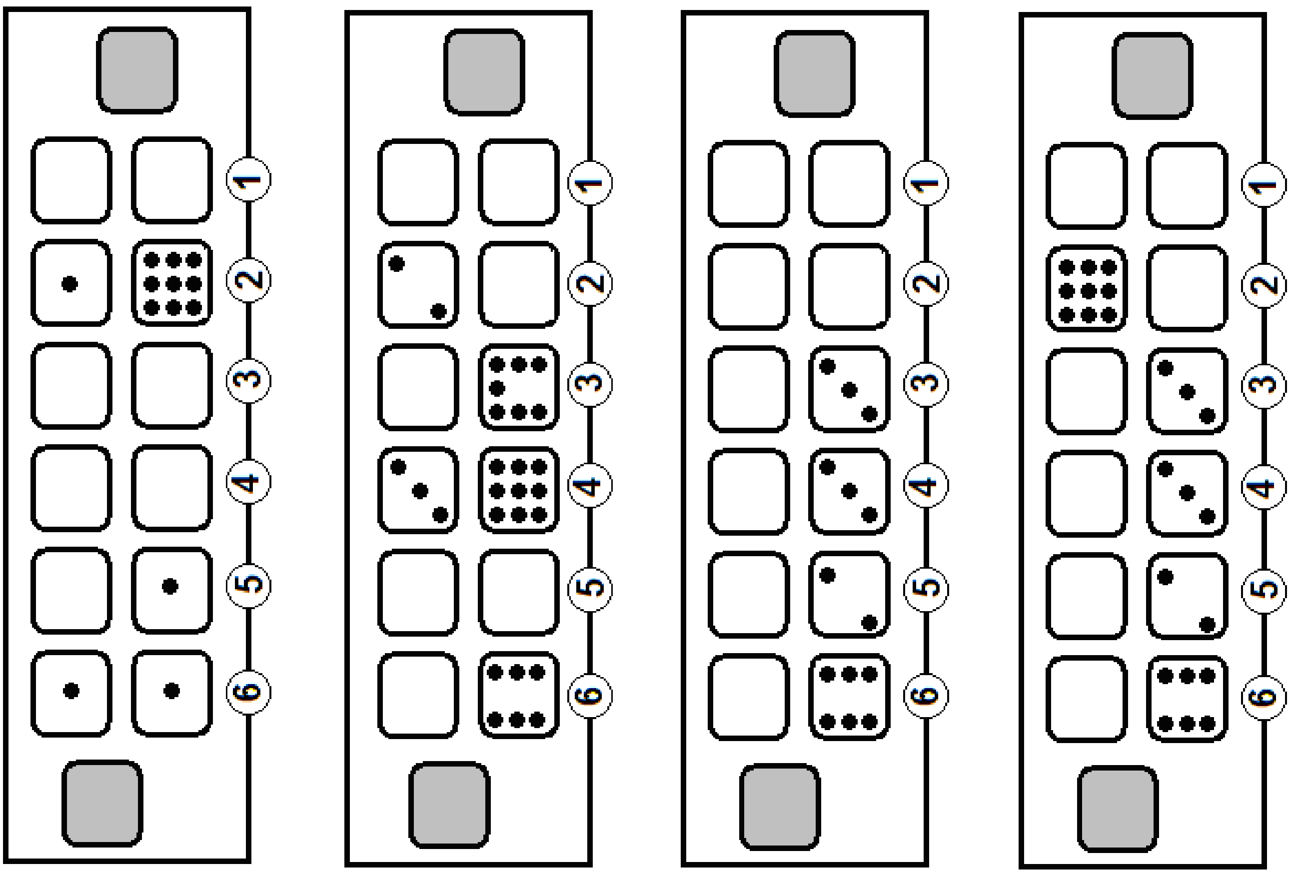
induló rekesz:	alsó sorba érkezik:	felső sorba érkezik:
1	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
2	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
3	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
4	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
5	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6



2./a Hol, melyik képletben találtál hibát? Elhelyeztem (M^*-S) értékeitől függően a fent számozott képleteket. Most hol hibáztam?



3./(a,b,c,d) Te következel lépésre az alábbi négy Bantumi-partiban. Mit lépnél? Írd le az egymás után ürítendő rekesz-számokat.



Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

A játékszabályok részletesebb bemutatását lásd még: **>>> Mészáros Mihály: "Egy ősi táblajáték a Mancala"**
A gondolkodási sémáról részletesebben: **>>> Mészáros Mihály: "Taktika-algoritmusok a Mancalában"**

Megjegyzem, köszönettel Misi barátomnak, hogy fenti munkái adtak kedvet nekem is még három, további kapcsolódó gondolatom, lejegyzésére:.

I. Úgy gondolom, akár már alsó tagozatban is érdekes és tanulságos lehet az **óegyiptomi „számtan"**.
Különösen azért, mert magam az ősi mancala-táblákat inkább olyan „ókori számítógépek"-nek tartom, amiket, mint régészeti leleteket, félreértelmezve és tévesen tekintették a kor játékainak…

II. Az „**5 db minta-feladat**" voltaképpen csak az alábbi egyetlen számpélda ínyenceknek:
Hány rekeszes az a (Bantumi-) Mancala-tábla, amelynek a középső rekeszéből 362 db magot szórva, pontosan a szemben lévő rekeszben végezzük?

Jól tudom, hogy rétegigény, de arra is gondoltam, hogy néhány tehetség-gondozó ráharaphat és tanulságosnak találva, továbbadhatja úgy is,mint logikai lánc és úgy is, mint 'eccerűtől' a bonyolultig..., …egyszersmind bepillantást mutatva egy elegáns számpélda tervezésének örömébe.

III. Az utolsó oldalon folytatólagosan hozzákapcsolt „**Bizonyítás teljes indukcióval",** már kissé erőszakolt, de…
…de van apropója és a módszer bemutatására, ismétlésére, gyakorlására alkalmasnak találom.

+2 „ráadás"-t is bemásoltam a végére korábbi anyagokból: **két szorzási algoritmust**,
meg a talán legegyszerűbben kivitelezett **egy doboz gyufaszállal játszható Mancala-át**

I. óegyiptomi „számtan"

Kb. 50.000 évvel ezelőtt vajon hogyan közölte a barlangba „hazatérő" ősember a társaival, hogy pl. hány állatot látott? Az egynél több kettőre (a sok-sok párt látván) biztosan volt valamilyen szava(-hangja) és talán már a háromra is, de akár bármi hang nélkül is, megmutathatta a keze nyitott ujjaival… Szinte biztos, hogy a gondolkodó-találékony ősünk megtanult 10-ig pontosan számlálni és az eredményt félreérthetetlenül képes is volt közölni (megmutatni). A sokkal többet, pl. a húszat-harmincat…, akár úgy is mutathatta, hogy két kezén kiterpesztett 10 ujjával egymás után többször felemelte a kezét.

Úgy tudjuk, hogy 3-5 ezer éve az egyiptomiak is ilyen, „a megszámlálást követő" sorrendben jegyezték le („írták" le) a számokat, mármint ha azt: a mai szokásunk szerint: balról jobbra haladó sorrendben olvasva értelmezzük. Előbb 1,2,3,…,9, vonalka, (mint az ujjaink), aztán egy jelzés arra, hogy „elfogytak az ujjaink" (ez a tízes jele) és kezdődik újra, újabb vonalkákkal 1-től 9-ig, majd újabb vonalkákkal minden újra kezdésre egy-egy tízes jellel emlékeztetve.

Pl. az óegyiptomiaknál a 24 így nézett ki : **IIII** ∩∩ , a 49 pedig így: **IIIII IIII** ∩∩∩∩

Hoppá! Ezzel már bármely két 10 alatt számot leírva, könnyedén össze tudunk adni és az eredményt írásban is lerögzíthetjük: Pl.: 7 db pálcika meg 8 db pálcika az 5 db pálcika meg egy tízes csomag…
Balról jobbra haladva, pici vonalkákat húzva kezdünk el számlálni, és ha azok darabszáma eléri a tízet, akkor azt a 10 db-ot elhagyjuk, és a törlést egy tízessel jelezzük:

I I I I I I I + I I I I I I I I = ~~IIIIIIIIII~~ I I I I I >>> I I I I I ∩ (15)

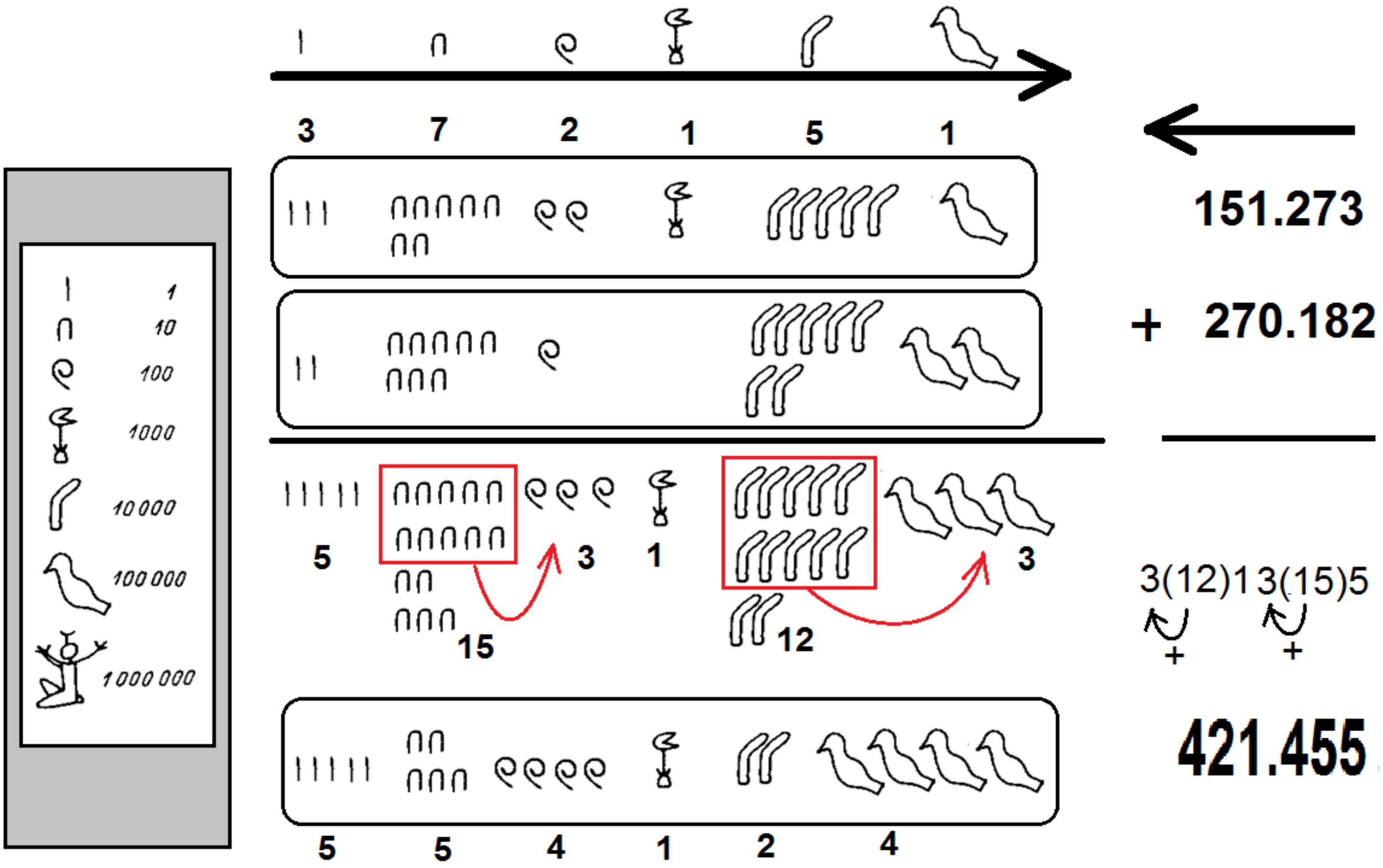
Ha van egy újabb jelünk a 10 db tízes csomagra (ez lesz a százas), meg 10 db százas csomagra (ez lesz az ezres), aztán folytatva tízezreseket, százezreseket mutató jelekkel, akkor már nemcsak leírni tudunk nagyon nagy számokat, de az ujjainkat használva (10-ig számlálva) össze tudjuk adni őket.

A tízig már **számlálni** tudó és a számjegyeket 1-től 9-ig már felismerő nagycsoportos óvodások is képesek tetszőlegesen nagy számokat összeadni úgy, ahogy azt már az ókori egyiptomiak is tették.

I./a óegyiptomi algoritmus számok összeadására

15.273 + 124.182 =? Kövesd az ábrán az alábbi 5 pontban jelzett algoritmust

1. Fordítsd le a (bal oldalon mutatott) óegyiptomi jelekre egymás alá a két szám egymást követő arab számjegyeit, de balról-jobbra, megfordított sorrendben: 37251 (felső) és 281042 (alsó).
2. Húzz egy vonalat és alatta másold össze a vonal feletti azonos (képű) jeleket.
3. Azokat a jeleket hagyd el, amelyekből így tíz lett, és a tőlük jobbra eső szomszédos jelekhez rajzolj hozzá még egyet.
4. Írd le (a megszokott arab számokkal) minden képi jel alá, hogy hány darab van belőlük.
5. Az összeadás eredményét megkapod, ha a 4 alatti számjegyeket fordított sorrendben, jobbról balra lejegyzed.

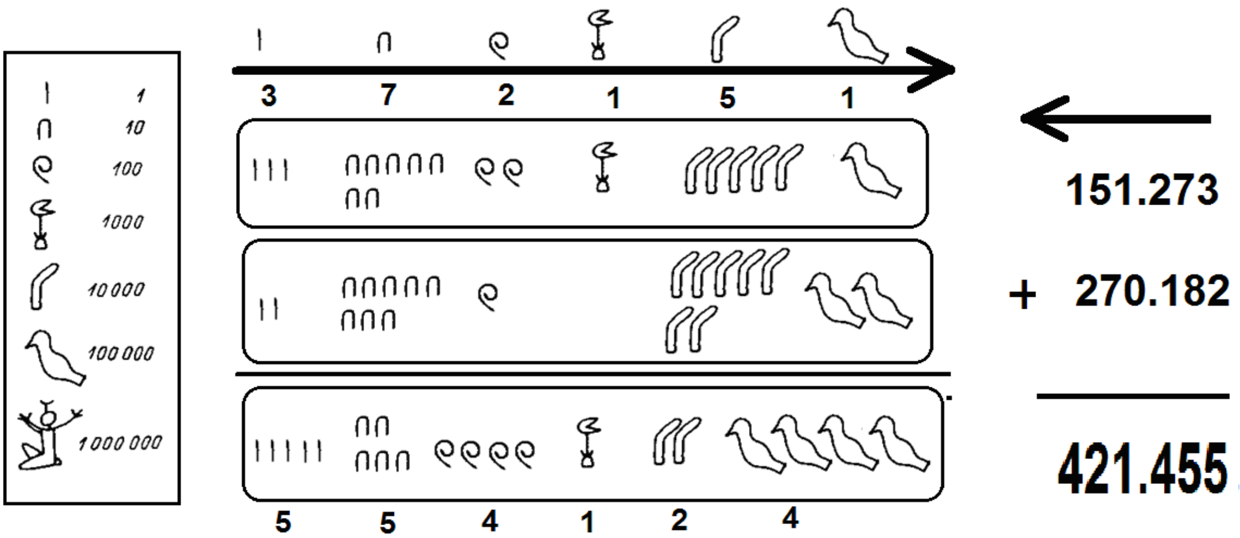


Magam, igencsak elképzelhetetlennek tartom, hogy ilyen meglehetősen munkás, rajzos-képes, módon történt volna az összeadás, bár biztosan akadt volna hozzá néhány ügyes-rajzolós kezű rabszolga.
Ámde! Mennyivel gyorsabb és egyszerűbb az, ha előkapunk pl. egy Mancala-táblát és annak rekeszeibe… pl. (átmászkálástól mentesített, v. döglött) skarabeuszokat rakosgatunk…
☺

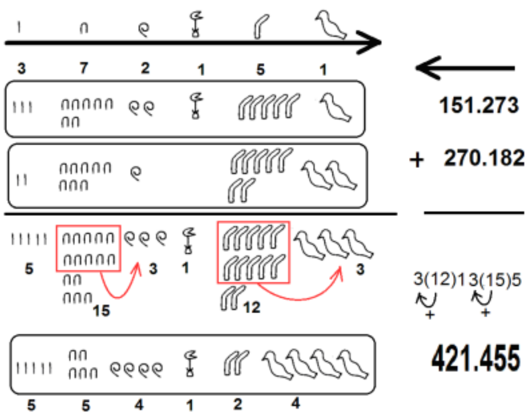
(Lásd majd a **kivonás-algoritmust**, amilyen talán sumérok „bevétel kiadás könyvelése” lehetett?)

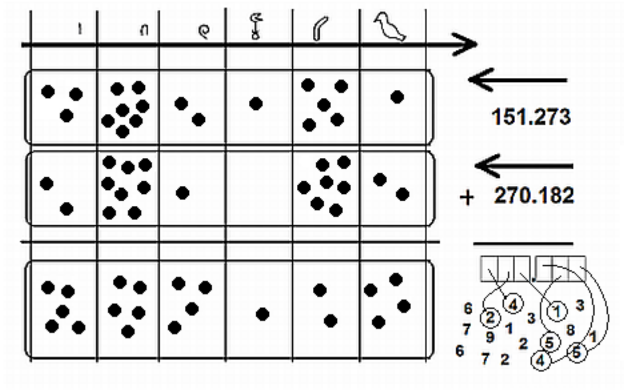
A régészeti leletekből úgy „tudjuk”, hogy ekkor már voltak mancala-játékok!!! Magam, csak azon gondolkodtam el, hogy vajon mi lehetett előbb: a játék, vagy a „kor számítógépe”. Logikusan, írásos-meggyőző bizonyítékok emlékek hiányában, magam arra is gondolnék, hogy az utókor „kreatív okoskodóinak” volt vagy 3-5 ezer éve arra, hogy elfantáziálgasson…, és utólagosan kitaláljon „ősi játékszabályokat”…, majd a „fontoskodó” publikációk, egymást idézgetve, valósággá erősíthették a tévhiteket.
Lételemem a kételkedés. (Különösen napjaink internetes „szénakazlának hamis aranytűiben”…)
Nagylaci (http://jatektan.hu)

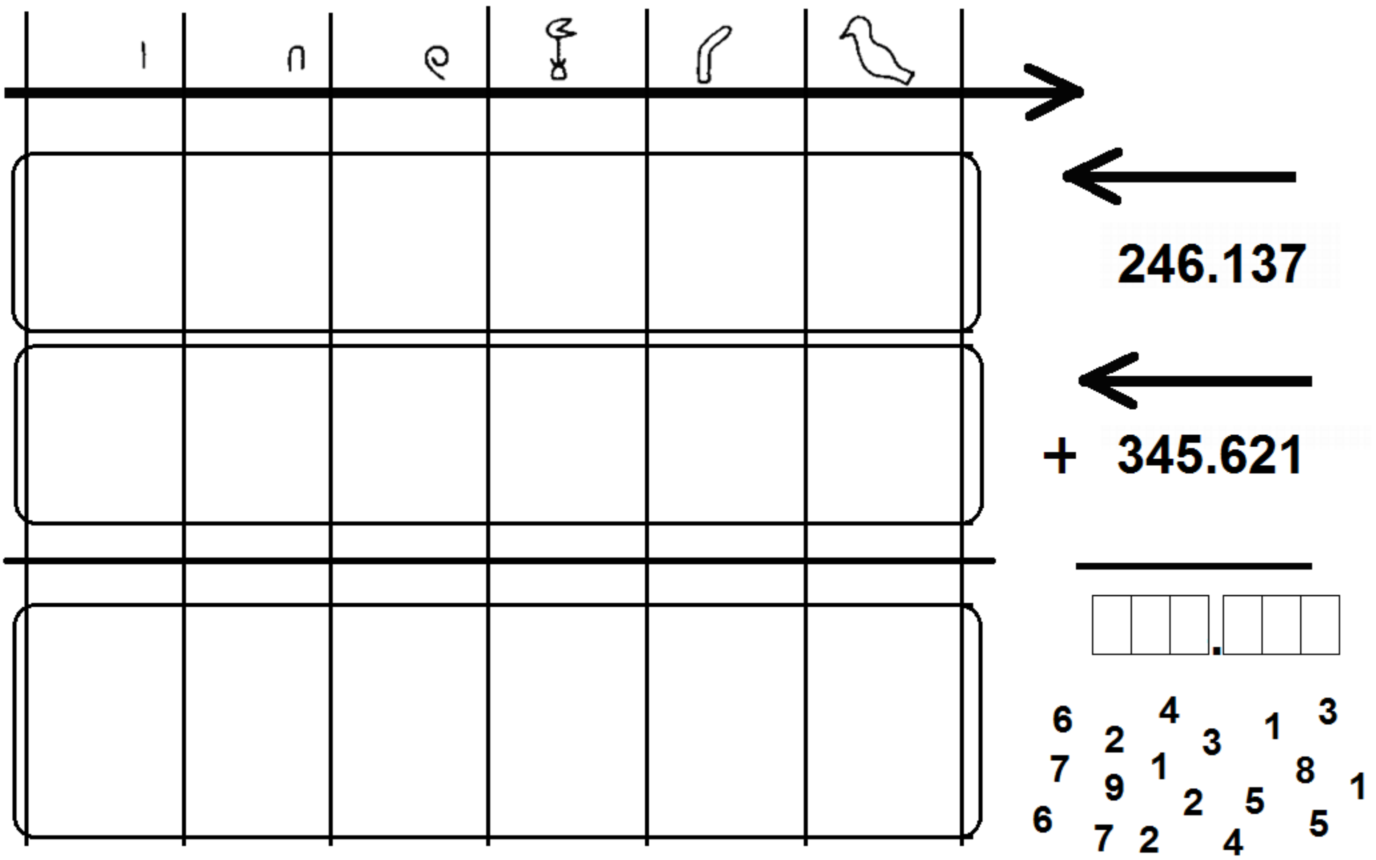
Feladatlaposan…



Felső képet átbeszéljük, alatta áttérünk a pöttyös ábrázolásra, lent pedig a megoldandó…







Már én is tudok (akár két nagyon nagy számot is) összeadni.

A minta (algoritmus) lekövetése:

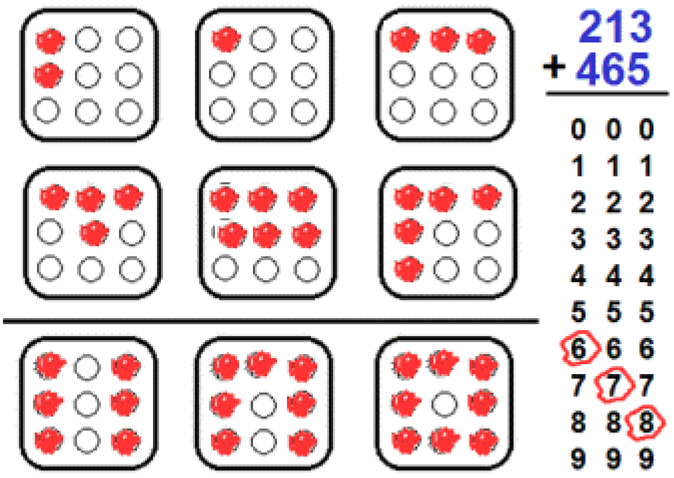
1. Az arab számokat „átfordítjuk” pöttyös ábrázolásra.
2. Megszámláljuk a felső két sor (az összeadandók) az összes pöttyeit.

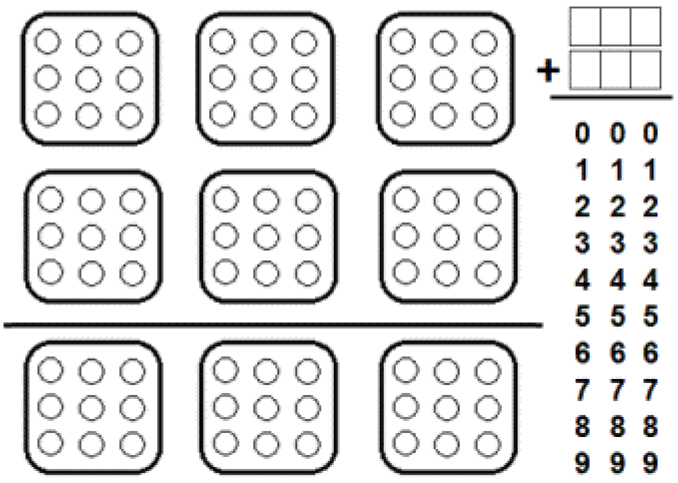
3./a Ha a számlálásban 9-ig jutottunk, akkor újra kezdjük 1-től, de előbb a balra beszínezünk egy pöttyöt.

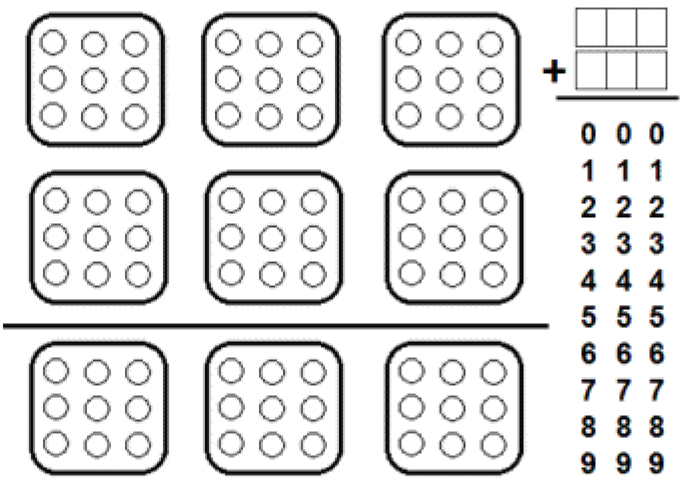
3./b Az alsó (eredmény-) sorban bejelölünk annyi pöttyöt, ameddig eljutottunk a számlálásban.

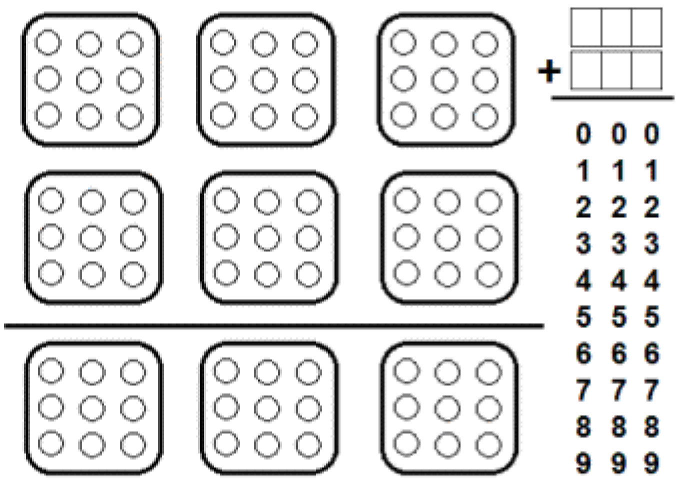
4. A pöttyökkel kiszámolt eredményt „visszafordítjuk” arab számokra.

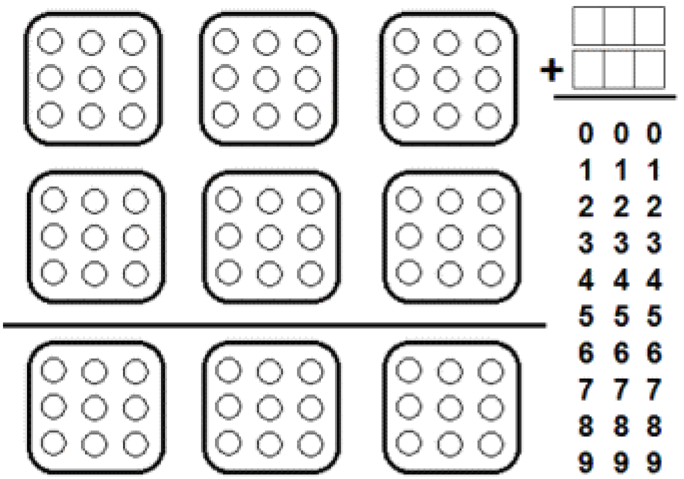
Azt is vegyük észre, hogy ezzel a módszerrel akármilyen hosszú számsort (óriási nagy számokat is) össze tudunk adni.
„Kimondani még nem tudom, arabusos számjegyekkel leírni is csak nagyon girbegurbán, de összeadni azt már IGEN.”

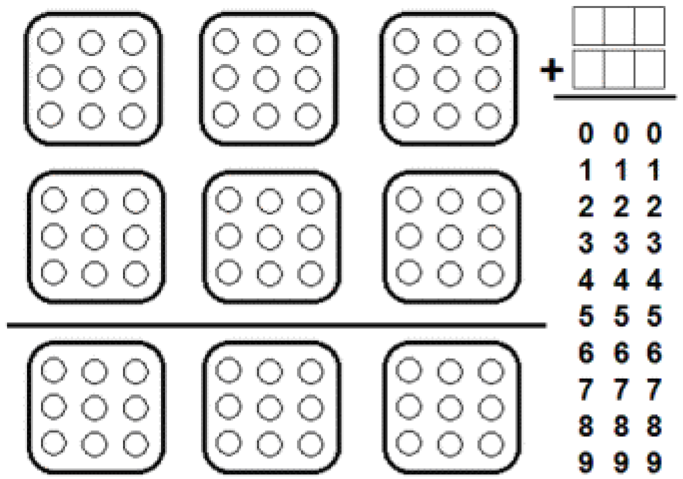












(Sokszorosítás előtt, ne feledd beírni az összeadandókat!)

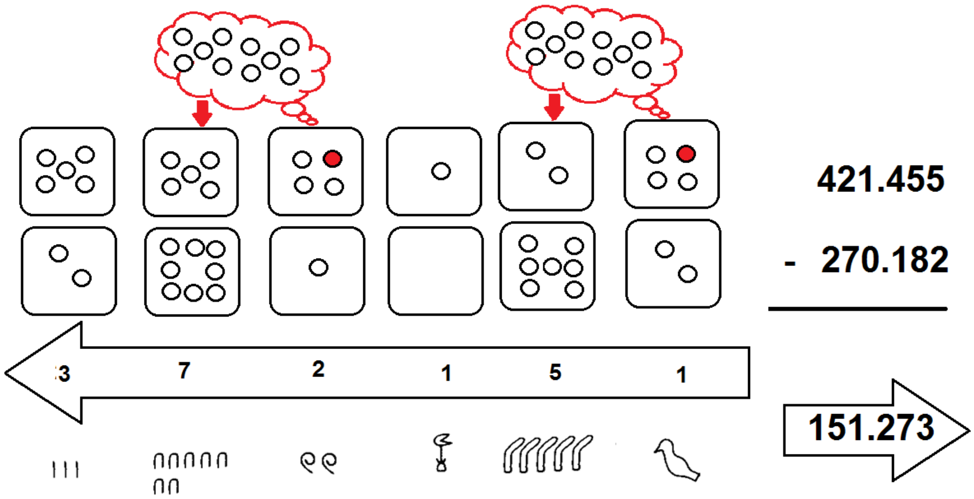
Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

I./b sumér (v. óegyiptomi?) kivonás-algoritmus (2x6-os mancala-táblán magokkal)

Az összeadásnál megismert fordított sorrendben (balról jobbra az egyesekkel kezdve) „írjuk bele" a számjegyeket (most belerakott magokkal helyettesítve) a tábla rekeszeibe. A felső rekesz-sorba a kisebbítendő, az alsóba a kivonandó számot.

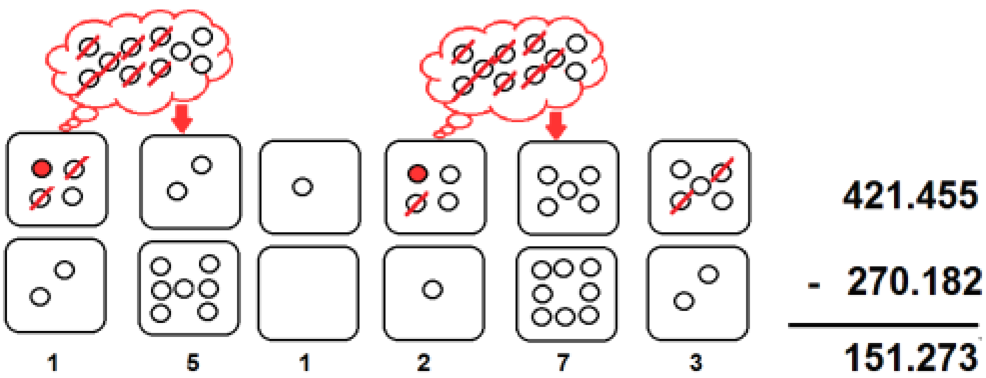
Algoritmusunk, most a következő:

1. Abba a felső rekeszbe, amelyikben kevesebb van, mint az alsóban, oda tegyünk be 10 db-ot, és a tőle jobbra állóból vegyünk ki egyet.
2. Mindegyik felsőből rakjunk át az alatta lévőbe annyit, amennyi annak a tartalma…
3. A fent megmaradókat „könyveljük le" óegyiptomi jelekkel, majd fordított sorrendben arab számokkal („fordítsuk le a ma megszokott helyiértékes arabszámosra").



Hát nem sokkal egyszerűbb ez így? Már csak azért is, mert nem vagyunk fáraók korában, ugyan minek-kinek rajzolgatnánk feleslegesen… Elegendő, ha csak az eredményt (fordított sorrendben) arab számokkal leírjuk.

Aztán persze, ezt az ide-oda számjegy sorrend-fordítgatásosdit is elhagyhatjuk egy „tükrözéssel":



1. Abba a felső rekeszbe, amelyikben kevesebb van, mint az alsóban, oda tegyünk be 10 db-ot, és a tőle ~~jobbra~~ balra állóból vegyünk ki egyet.
2. Mindegyik felsőből rakjunk át az alatta lévőbe annyit, amennyi annak a tartalma…

Egy 2x6 rekeszes Mancala-készletet használva akár egy ovis is betanítható az algoritmusra és képes összeadni, kivonni a számára még óriási-értelmezhetetlenül nagy számokat egészen 999.999-ig, ha már 9-ig ismeri a számjegyeket. *Sikerélmény lehet: kalkulátoron* ***képileg leellenőrizni*** *a „kimondhatatlan" eredményt.*

Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

I./c Ha már számolunk… Tudod-e, <u>hogyan szoroztak az ókori Egyiptomban?</u>

Összeadni tudtak és akkor ugye a „szorzás = ismételt összeadás”. *„Ha összeadni tudok, akkor szorozni is!”*

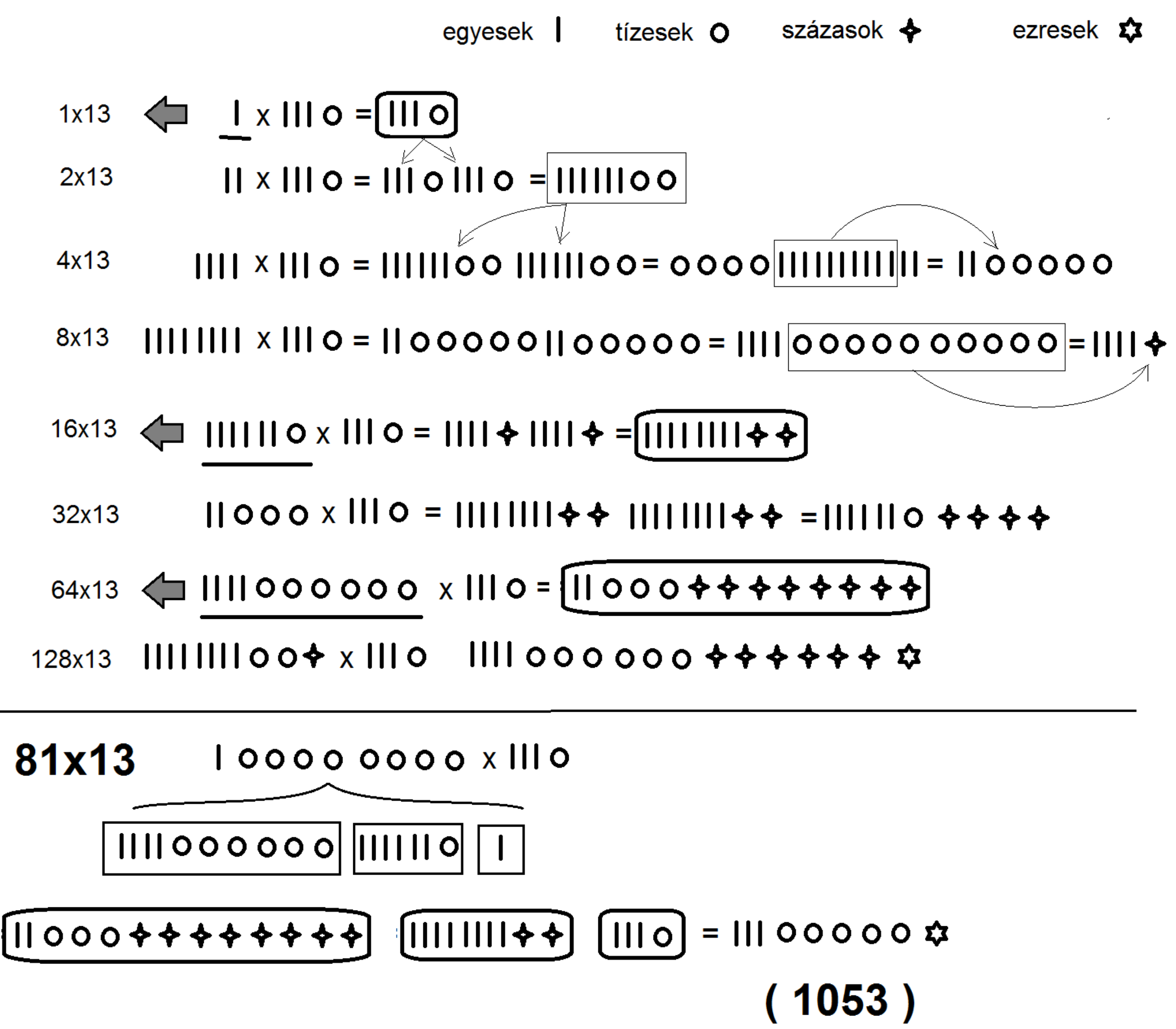
Pl.: **81x13=?**

Megtehették volna, hogy 13-szor leírják egymás alá a 81 óegyiptomi számképét és elvégzik a (sok-sok tízes-átlépéssel, sok-sok munkával) az összeszámlálásokat.

Ámde, úgy szoktam mondogatni: „a jó matekos olyan okos lusta, aki gondolkodik, keresi a kevésbé munkás megoldásokat”. *Megjegyzem, én úgy tudom, hogy még az ókori Rómában is, mi több: még a középkor elején is: a sokat könnyítő-egyszerűsítő „duplázásos technikával” szoroztunk, aminek az alapjait az ókori Egyiptomból örököltük.* ***(Magam, a rómaiak „kreatív lustaságának” tudom be az 5>V, 50>L, és a 9>IX, 8>VIII, stb.”felfedezését” is…, hogy legyen már elég 3-szor… ugyanazt a jelet…)***

Készítsünk összeadással egy „**duplázásos szorzótáblát”**, pl.: most a 13-ra, aminek minden sorában, az előző sor kétszerese szerepeljen (azaz: <u>az előző sor önmagával történő összeadásával</u>)!

A tábla három vastagon keretezett részében: **<u>1x13</u> + <u>16x13</u> + <u>64x13</u> = 81x13** ! Tehát nem 81-szer kell összeadni a 13-at, hanem csak a rá vonatkozó szorzótábla három sorának az eredményét:



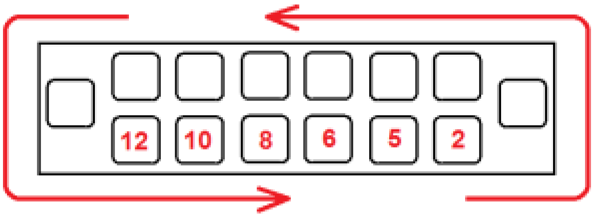
Megpróbálnád? Pl.: a szorzótábla felhasználásával számold ki a **<u>11x13</u>** szorzás eredményét!

Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

II. 5 db gondolatébresztő MINTA-FELADAT *(Közben, bepillantás a számpélda-tervezés örömeibe…)*

A Mancala szórás-szabályát jól ismerők számára nem túl nehéz megválaszolni azt a kérdést, hogy:

1. Melyik gödörben hány magnak kell lenni ahhoz, hogy a szórás utolsó magja pont az indulásival szembeni gödörben landoljon? (Lásd a rekeszekbe írt számokat!)

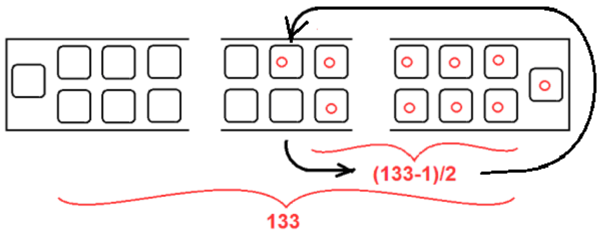


A kérdésre precíz-pontos választ várónak a hiányérzete is megérthető, hiszen (gondolva a hosszabb többszöri körbe-szórásokra): pl. a 12 mellett, jó válasz még a 24, a 36, stb., vagy pl. a 2 mellett jó megoldás még a 14, a 16, a 18, a 20, a 22…
(Elméletileg ugye végtelen sok jó megoldás lehetséges, betartva a szabályt: saját gyűjtőnkbe mindig rakunk, a versenytárunkéba soha és a kezdő gödröt üresen hagyva, mindig át kell ugrani.)

(Amit kicsiben megértettünk, hasznos tapasztalatot jelent a nagyobbak esetére is.)

2. Egy 2x133 rekeszes, két oldalán 1-1 gyűjtős Mancala-táblának hány magot tartalmazott a középső rekesze, amit szórásra kiválasztva, pont a vele szemben lévő rekeszbe landolt az utolsó mag?

Az ábrában lekövetve a szórást:
(133-1)/2+1+(133-1)/2+1=133+1=134, de elméletileg ugye itt is végtelen sok megoldás létezik még:
400, 666, 932,…, stb., attól függően,
hányszor írt még le egy-egy teljes kört a szórás:
(**Egy kör 2x133=266 db mag szórását jelenti.**)



A 400 „szép-kerek" szám, de a vele átfogalmazott (3.) hasonló feladatnak is több megoldása van.

3. Hány rekeszes az a Mancala-tábla, amelynek a középső rekeszéből 400 db magot szórva, a szemben lévő rekeszben végezzük?

Az összefüggés az előző (2.) feladatból, a magok száma és az x-el jelölt rekesz-szám között,
(ha még n db teljes kört is leírtunk): 400 = x + 1+ n 2x, azaz **x = 399 / (2n+1)**

399-nek a törzstényezős alakja: **3 x 7 x 19** (három prímszám szorzatából áll).
2n+1=19 esetén (amikor n=9) x = 399 / 19 =21; n=28 esetén x=7, ill. lásd értékpár-táblázatban:

	2n+1 =	**3,**	**7,**	**19,**	**21,**	**57,**	**133**
Az egy sorban lévő rekeszek száma:	**x =**	**133,**	**57,**	**21,**	**19,**	**7,**	**3**

A fentiek alapján, már magad is kitalálhatod: Hogyan, milyen számmal tegyük fel a 3. feladatban kiszámolandó kérdést, ha azt akarjuk, hogy arra csak egyetlen helyes megoldás létezzen?
Felvezető előzmények nélkül ugyanis, már a 3. feladat is "középsulis szint", de így lesz igazán elegáns:

4. Hány rekeszes az a (Bantumi-) Mancala-tábla, amelynek a középső rekeszéből 362 db magot szórva, pontosan a szemben lévő rekeszben végezzük?

Kontroll-kérdés:

5. Milyen *(mondjuk 500 és 1000 közötti)* számokat írhattam volna még a 4. feladatba (a 362 helyett), ahhoz, hogy azokkal is csak egyetlen megoldás létezzen?
a./első könnyítésként: a 4. feladat megoldása: 2x19 rekeszes a tábla
b./második segítség: hány teljes kört tartalmazott a 362 db mag leszórása? (n=9)
c./harmadik segítség: mi is az összefüggés a magok száma (db) és x és n között? db – 1 = x (2n+1)
d./a megoldás (23x23+1=) **530,** (29x29+1=) **842,** (31x31+1=) **962**

Némi ötleteléssel rengeteg hasonló feladat fogalmazhatunk meg a mancalákhoz…

Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

III. Bizonyítás („teljes indukció”-val)

Esetleg elbizonytalanodhatunk abban, hogy vajon nem csak néhány példa alapján általánosítva tévedtünk és talán lehet olyan (páratlan) X, N és M, amire nem igaz az előző feladatokban használt képletünk:

M = X (2N+1) + 1

Bizonyítandó: <u>X db saját rekesz középsőjéből induló minden szórás a vele szembeni rekeszben végződik, ha az induló rekeszből kivett magok száma M: a fenti képlet szerinti, ahol N (a teljes kört leíró szórások száma) bármely természetes egész szám.</u>

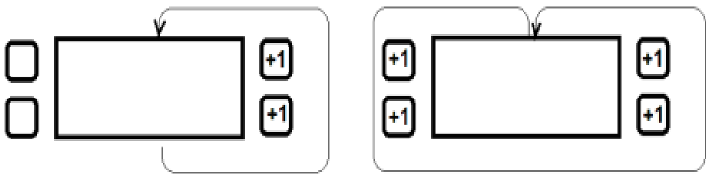
Elv a következő: „Ha egy tulajdonság igaz 1-re (n=1), továbbá ez a tulajdonság olyan természetű, hogy öröklődik a természetes számok rákövetkezése során (tehát n-ről n+1-re), akkor ezzel a tulajdonsággal az összes természetes szám rendelkezik. A módszer neve félrevezető, valójában nem általánosításról, hanem a matematika szabályai szerinti bizonyításról van szó, azaz a ’teljes indukció’ – mint minden más matematikailag helyes módszer – tulajdonképpen ’dedukció’.” (Wikipedia)

1. Tételezzük fel, hogy létezik olyan X=k, amire igaz, hogy M-1=k(2N+1).

2. Nézzük meg, hogy ebből következik-e hogy k+2-re is igaz lesz.

A nagy téglalapba összefoglalt k esetén igaz az, hogy k(2N+1)+1 képlettel kiszámított mennyiségű maggal kezdve alul középről indulva, mindig a szemközti rekeszben landolunk az utolsó maggal.
Ehhez képest az ábránkon k+2 rekesz esetén csak a többlet-rekeszeket vegyük számításba.

A bal oldali ábrából láthatóan, körbefordulás nélkül <u>**+2 db**</u> induló maggal kell megnövelni az induló rekesz tartalmát; a jobboldaliból pedig azt, hogy minden teljes körös újabb szórásnál még tovább meg kell azokat növelni: <u>**+4 db**</u>-bal.



Tehát: k+2 db rekesz esetén, N=1-nél összesen +6 db, N=2-nél összesen +10, N=3-nál +14 db… és így tovább: <u>4N+2 db</u> maggal indulva érünk be ugyanabba a szemközti célba, ahova a k db rekesz esetében, azaz:…

A k db rekeszeshez képest a k+2 rekeszes esetén, minden N-re általánosan: <u>2+4N</u> db maggal kell növelnünk az induló rekesz tartalmát.

Ugyanerre az eredményre jutunk a képletet használva, ha a „k+2”-ből levonjuk a „k” esetet:
(k+2)(2N+1) - k(2N+1) = <u>4N+2</u>

A k=3-ra már korábban ellenőriztük, meggyőződtünk róla, hogy teljesül a képlet. Azt pedig most bizonyítottuk be, hogy ha ez egy adott rekeszszámra igaz, akkor az annál 2 rekesszel nagyobbra is igaz.

<u>**Tehát folyamatosan „átöröklődő tulajdonság” 5,7,9,11, stb. valamennyi további páratlan számú rekeszre…**</u>

Megjegyzem:
Kissé erőszakolt, és jogos kérdés is, hogy „valóban szükség van-e itt a teljes indukciót használni(?)”, de a módszer bemutatására és gyakorlására jól használhatók, alkalmasak a fentiek. Voltaképpen ugye a két ábra (némi kiegészítéssel, mint a probléma-felvető 1. feladatban) általános bizonyítás lehet bármely egy-egy sorban páratlan rekesz-számra.

Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

Így szoroztak az ókori rómaiak

9 x 7

9 - 5 7 - 5

Mindkét számból vonjunk le 5-öt és mutassuk meg kinyújtott ujjainkkal az eredményt !

4 + 2

= 6 x 10 = 60

1 x 3 = 3 + 3

A nyitott ujjak összege adja a tízeseket

A zárt ujjak szorzata adja az egyeseket

63 ☺

$$10x[(X-5)+(Y-5)] + (10-X)x(10-Y)= XxY$$

$$\cancel{10X}-\cancel{50}+\cancel{10Y}-\cancel{50} + \cancel{100}+XxY-\cancel{10X}-\cancel{10Y}=XxY$$

Picit átvariálva, ugyanez…

egy Mancala-játék segítségével működik pl. a 10 és 20 közötti számokra is.

Pl. **17 x18=?**

Rakj két felső rekeszbe 20-17=3 db és 20-18=2 db magot.

Általánosan: annyit, amennyivel kipótolhatók a számok 20-ra! Ezek lesznek a „felsők”.

A két alsó rekeszbe pedig rakj 17-10=7 db és 18-10=8 db magot.

Általánosan: mindkettőből vonj le 10-et! A maradékok lesznek az „alsók”.

A két alsó összegének a kétszeresét szorozd meg 10-zel.

[ez ugye a példánkban (7+8)x2x10=300]

és ehhez add hozzá a felső kettő szorzatát.

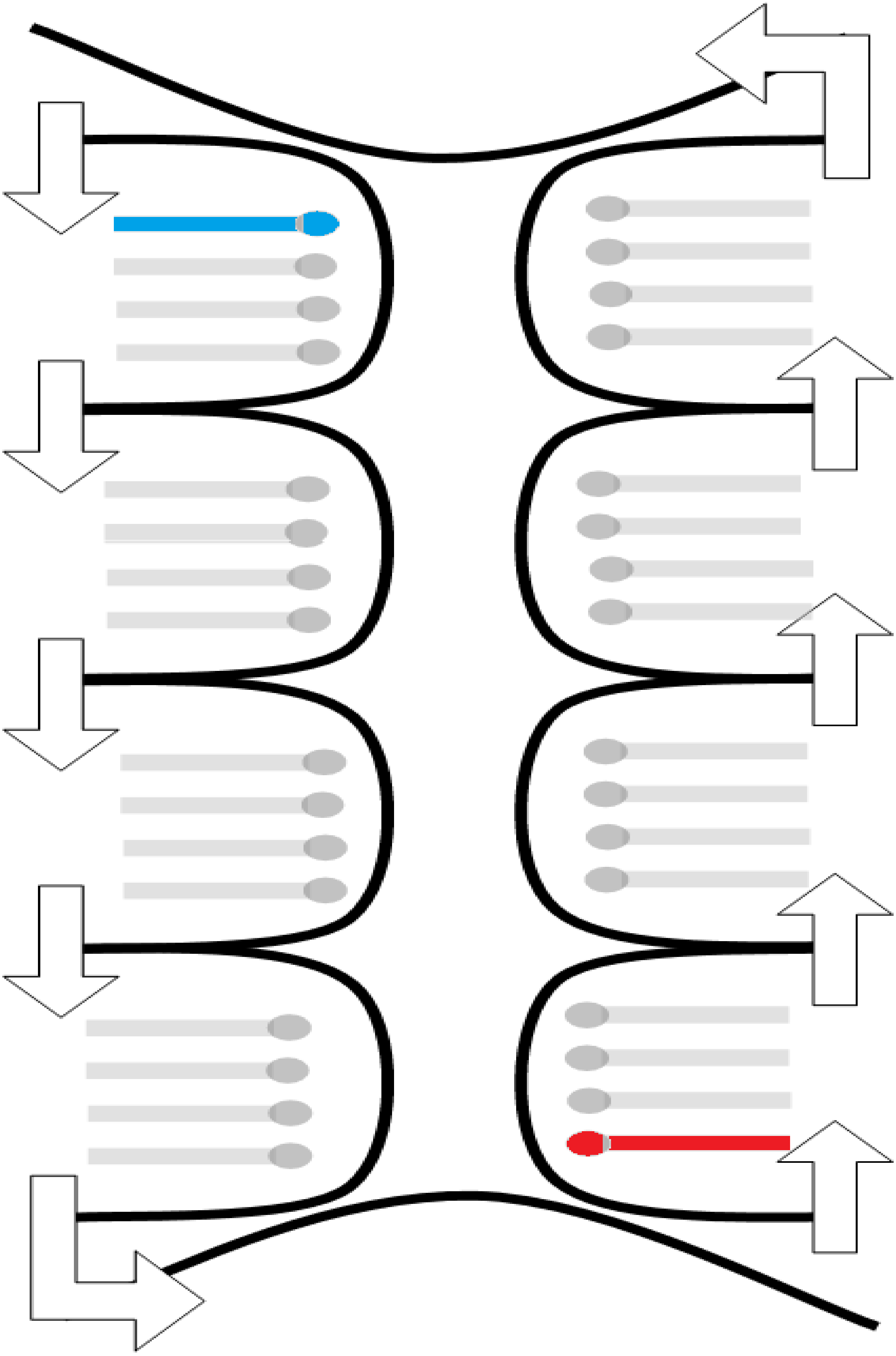
[ami a példánkban 3x2=6]

300+ 6 =306= 17x18

Hogyan is van ez? Pici algebra: (20-X) x (20-Y) + (X-10 + Y-10) x 2 x 10=X x Y

Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

Dobókockás vezérléssel izgalmas lehet a **„Vezérek versenyfutása”**.
Induláskor minden rekeszben 4-4 db katona és átlósan szemben a 4. (és az 1.) rekeszben közöttük 1-1 db vezér.
A dobókockával kivetett rekeszt kell szórni, de mindig utolsóként kell lerakni a vezért.
A saját gyűjtőkbe most nem rakunk, de a versenytárs gyűjtőjébe mindig (amikor csak útba esik).
Az nyer, akinek a vezére előbb ér vissza a saját térfelére. Ha a két vezér egy rekeszbe kerül, akkor döntetlen. A partinak akkor is vége, ha egyik vezér az ellenfél gyűjtőjében landol, „csapdába esik” és azonnal veszít. (Ámde, extra nyerő is lehet, ha „várnak” nevezzük, amit sikerült elfoglalni…)
☺

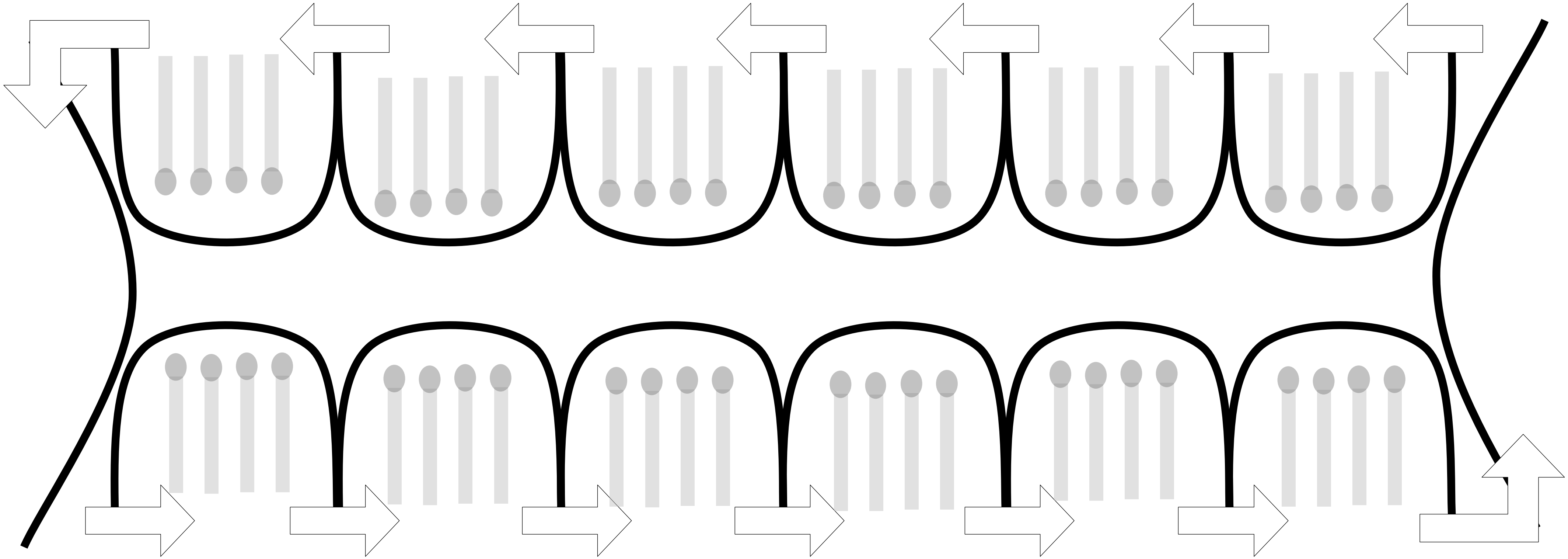


MANKALAVARI PICUROKNAK

Forrás: Nagylaci: (>>> http://jatektan.hu)

Mancala-„Bantumi” (összesen 48 db mag-bábu kezdéskor: **a rekeszekben 4-4 db, a kétoldali gyűjtők üresek**)

Ketten, egymással szemben a tábla hosszú oldalain, a kezdő játékos nézőpontjából: mint „alsó” és „felső” versenyeznek abban, hogy ki gyűjt be több magot…
Egy-egy lépésben tetszőleges sajátoldali rekesz összes „magját” kell felvenni és körben (a nyíl mutatta irányban) egyenként kell lerakni a rekeszekbe.
A saját gyűjtődbe teszel, ellenfeledébe nem. Mindössze három „**hahaha**” szabály van: **Ha** saját-oldali üresbe kerül az utolsó, akkor az is a gyűjtődbe kerül, sőt: **Ha** a szembeni rekesz nem üres, akkor annak teljes tartalmát is „elraboltad”. **Ha** az utolsó lerakottad a saját gyűjtődbe érkezik, akkor újra te következel.
Vége a partinak, amikor vagy az alsó, vagy a felső oldal kiürült. Ekkor, a másik oldal a számolás előtt, még a saját rekeszébe teszi az ő oldalán maradtakat.



forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)