A foglalkozás célja picit leállítani az egyre általánosabbá váló rohanásunkat.

Lassulj le! Figyeld meg a részleteket! Elgondolkodni jó. Mindig legyél picit gyanakvó és vedd észre, ha manipulálnak. Ha megértettél valamit, ha megtetszett, akkor tedd be az „agyi eszköztáradba", jól fog jönni hasonló esetek megoldásához a már ismert „szikra"… Az első gondolataid mindig ezek legyenek: „Volt már valami hasonló?" „Az hogyan is volt?" „Ez most miben más?"

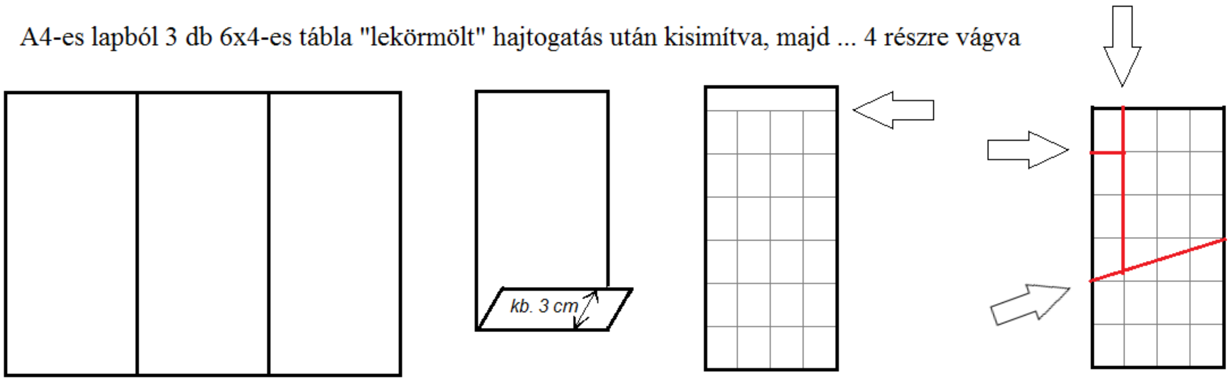
A matekban pl. nincsenek csodák, a látszólagos lehetetlenségek mögött mindig felismerhető valamilyen trükk, néha ismerethiány, de legtöbbek igénytelen válasza csupán egy legyintéses reakció: „na és, és akkor mi van?"

A gondolkodó ember kíváncsi, a váratlannak, a szokatlannak a megértése pedig mindig kellemes sikerélmény. Ne elégedj meg a felületesen, az első gondolatra adott válasszal, ellenőrizd, hogy valóban hibátlan-e. Ha már van válaszod, akkor ne mondj le a megerősítés, a bizonyítás újabb sikerélményéről se!

Védekezz a manipuláció ellen! Vedd észre a csalafintaságokat!

A **„csoki-tördelős videó"** (az általam eddig látottak közül a legszemléletesebb) kár lenne kihagyni, de egyszerűen le is modellezhetjük pl. egy kb. 10x20 cm méretű papírlap harmonika-szerű hajtogatásával.

A4-es lapból 3 db 6x4-es tábla "lekörmölt" hajtogatás után kisimítva, majd ... 4 részre vágva

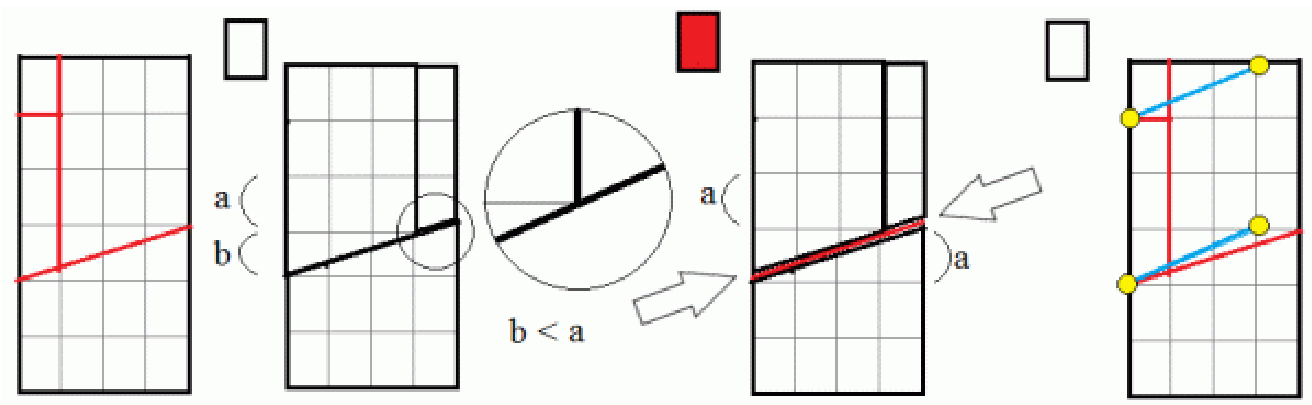


A videóban (>>> **http://www.jatektan.hu/csokiyoutube.html**) vegyünk észre a csalafintaság elrejtését segítő még két turpisságot is:

1. *A tördelős darabolás ugye eleve* ***pontatlan****. Sokan felületesen (bár lényegében helyesen) tippelnek erre, megállapítva: „****jópofa****", de a lényeg észrevétele nélkül rohannak tovább valamelyik következő videóra/képre.*

2. *(Tudatos, vagy véletlen, de) mindenképpen megtévesztő a perspektivikus felvétel, ami eltorzítja a „raszter" magassági méreteit és így nehezebb felismerni a törésvonalon álló „raszterek" méretcsökkenését.*

A hajtási vonalakkal jelzett (jó világításban is csak sasszemmel látható) halovány raszter persze legalább ennyire csalafinta, de felfedezhető, hogy: az áthelyezésekkel „kinyert" darabka területe a ferde vágásban maradók a területcsökkenésének összegével azonos. A lényeget legszemléletesebben a jobb oldali ábra mutatja.



A **„+0,5 / -0,5 csalafintaság”** talán a „legklasszikusabb” ebből a típusból.
A „***különböznek a meredekségek***” kulcs-szóval gyorsan-azonnal tovarohanók közül sokakat elbizonytalanítottam már, a pontos szerkesztéssel…

(Lásd hozzá a mellékelt feladatlapot és az animátor segédletét!)

Tanulságos részletesebben megfigyelni az ábrát és a meredekségek mellett, a területeket is számolgatni… ☺

A témába bele erőszakolható (az apropóként beidézett szólással) egy csoportos agyalós beszélgetés: a szabály fogalmának értelmezéséről.

„***a kivétel erősíti a szabályt***”

A szólás logikailag ellentmondásos, hiszen ha vannak kivételek, akkor ugye nem is olyan szigorú az a szabály. Netán utalhat a szólás a szabály ellenőrzöttségére? A kivételek ugyanis többnyire csak az alapos bizonyítások és vizsgálódások során tárhatók fel, amiből következtethetünk arra, hogy az ilyen (kivétellel bíró) szabályok jó működésének teljességre törekvő bebizonyítása megtörtént. DE(!) az sem kizárható, hogy a kivétel pont a szabály valamilyen okból hibás működését jelzi… A kivétel el is bizonytalaníthat. (” Biztos, hogy a felsoroltakon kívül nincsenek más kivételek is?”).

Mit értsünk „szabály” alatt?

*Matematikában, a bizonyított tétel alkalmazása: szabály követés (pl.: „törtet-törttel úgy osztunk…” Követjük, betartjuk a szabályt az nélkül, hogy újra és újra bizonyítanánk a tétel hibátlanságát. Mindegyik tudományágban vannak megfigyelésekből, felismert természeti törvényekből, stb. és nem ritkán hipotézisekből következő szabályok, de ismerünk pl. udvariassági, közlekedési, jog- szabályokat, stb-t is. A szabály a gondolkodó „társas lény” ember találmánya: **bonyolult okokat egyszerűsít okozatokra**.*

*A fenti szólás leginkább talán a társadalmi együttélésünk szabályaira vonatkozik. Amíg a tudományokban a kivételek gyengítik a szabályt, együttélésünk szabályaiban minél több a kivétel, annál inkább gondolhatunk arra, hogy alaposan indokolt, elemzett, vizsgált, átgondolt… és haszonnal jár a mindenkori betartása, a követése az nélkül is, hogy újra és újra felidéznénk, megértenénk a miértjét. Szülők és gyerekek, nevelők és oktatottak között is szabályok sokasága működik… Az esetlegesen felvetett „**miért kérdésre**” gyakori a türelmetlen válasz: „CSAK. **Mert ez a szabály**!” Durván fogalmazva, a szabály az idomítás, nem ritkán a kényszer eszköze is. (Ha első alkalommal netán még magyarázzuk is a miértjét, az ismétlődő alkalmazáskor „csak” betartatjuk.)*

*A stratégiai táblajátékokban jártassak különösen érzékenyek a szabályokra. Azok nélkül ugyanis nem működik a játék. Ugyanakkor egy-egy versenyszerűen is játszott táblás esetén elkerülhetetlenül tárgya lesz az elemzéseknek az esélyegyenlőség és szinte mindennapos gondolat lesz a hibásnak minősült, pl. az egyik fél számára túlzott előnyt biztosító szabályok megváltoztatásának igénye. Tömören: a táblajátékosok **betartják a szabályokat, de azt is tudják, hogy a szabályok megváltoztathatók…** A változtatás pedig mindig megegyezéssel, vitával, meggyőzéssel, konszenzussal történik… A táblajátékos társadalomban mindig a hozzáértő legtapasztaltabbak konszenzusa hagyja jóvá a szabályokat, amit aztán a kevésbé jártasok „tekintély elv” alapján követnek…, mindannyiunk megelégedésére… (Lefordítható…, annak is tűnik, de ez még nem politika.)*

A **„négyzetből-téglalap”** (Részletesen lásd a mellékelt feladatlapot és az animátor segédletét!)

A picit becsapós, versenyszerű találás várhatóan maradandó élményként ismétli meg az előző feladat lényegét. „Nincs megoldása. Azt hittem versenyt nyerek, de hát mindannyian hibáztunk…” Többnyire ekkor értik meg miért kell lépésről-lépésre folyamatosan kontrolálni, mert a pici hézagok és pontatlanságok összeadódnak…

A **„szétvágósdi”** (bonyolultan próbálom az egyszerűt is) rejtvényfejtő körökben mindig sikert aratott.

Lassan 40 éve, hogy magam is beugrottam, még a Szentháromság téri kollégium (ma már „MAGYARSÁG HÁZA”, a Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt. székhelye) egyik első emeleti 8-ágyas szobájában… csaknem 20 perc kellett ahhoz, hogy felállva a vázlataimból elröhögjem magam rutinos ostobaságomon…

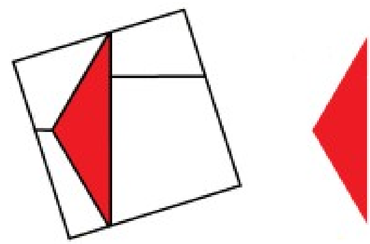
(Részletesen lásd a mellékelt feladatlapot és az animátor segédletét!)

Hatszögből-négyzet

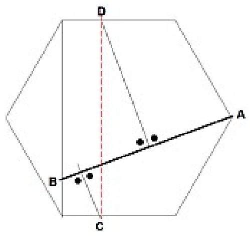
*Tán már 15 éve, hogy MENSA-sokkal vitatkoztunk, lehetséges-e megoldása a „hatszög négyzetesítésének”. Abban a körben, - az „kiemelten okoskák” között -, sem volt ritka, egy-egy rohanva odavetett kulcsszóval elintézni a felvetett talányt, problémát és rohanni tovább… Itt a kulcsszó az „**irracionális szám**” volt és szűk körben egyedül maradtam azzal a véleményemmel, miszerint (szerintem) nem bizonyítja a lehetetlenséget az, hogy „irracionális számok keverednek” a megoldásba… (Lásd a mellékelt megoldásomban a szerkesztést.)*

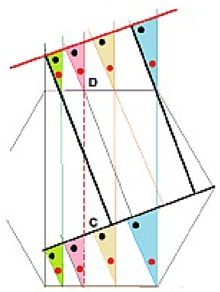
A megoldás teljes lekövetése talán már az érettségire készülők szintje, de a 7-10 éveseknek is sokkal többet adhatunk vele annál, mint „Légy ügyes! Rakj össze az 5db elemből előbb egy négyzetet, majd egy hatszöget!” Pl.: Miután az elemeket nem kell elforgatni a megoldáshoz, kezdőként is könnyen gyakorolhatnak vele egy rajzoló-progiban. Magam pl. a legegyszerűbb paintbrush-progival dolgoztam.

A fekete vonalakkal szerkesztett ábrából kiemelendő elemet beszíneztem, majd az egész ábrát, „átlátszó fekete” beállítással áthúztam a fehér háttérre. Az ötszöri ismétlés még nem unalmas és sikerélményes gyakorlás, a szétbontás is és az így kapott elemek hatszöggé történő összehúzogatása. Kevés ilyen kirakóst ismerek, amelyekben nem kell elforgatni az elemeket. ☺



és / vagy… még pl. a nagyobbaknak:





Érdekes bizonyítandó feladat lehet az az állítás, hogy ***a két szélső érték között bárhol meghúzható a C és D pontokat kijelölő függőleges***… (Lásd a mellékelt megoldásban.)
A téglalap egyik oldalának hossza mindig az AB szakasz.
A DC függőlegest „bárhol” meghúzva, az AB-re irányuló merőlegesekkel kiadódó háromszögek megfelelő befogói hosszának az összege állandó érték és pont a kirakható téglalap másik oldalának hosszával egyezik meg.

Ha van a foglalkozáson működő Háló-kapcsolat, akkor kapcsolódó ajánlás még:

„Vicces IQ-teszt” (a gyerekek előnye a tanult felnőttekkel szemben):
http://www.jatektan.hu/jatektan/00004/miniiq.html

„csalóka képek” (agyunk iskolázottsága és a szemfényvesztés):
http://www.jatektan.hu/jatektan/z2005/optik/optik0.html

„Vágd szét, rakd össze” (Mochalov feladványai):
http://www.jatektan.hu/jatektan/____2012_006/szetvagos_feladvanyok.pdf

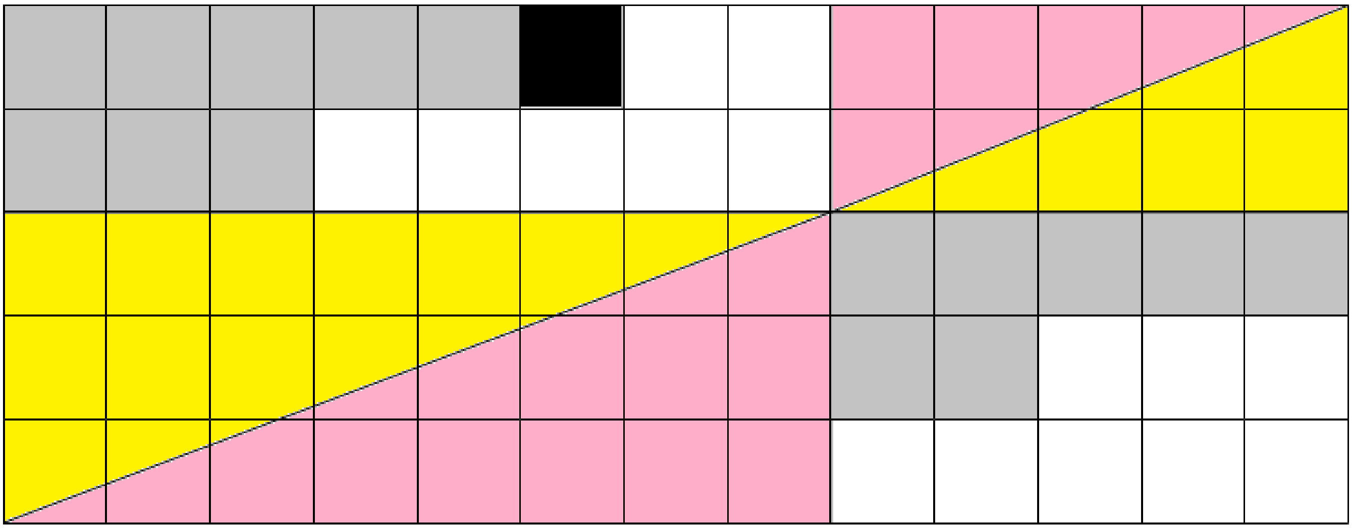
Gondolatébresztő ötletek a pentominós fogalalkozásokhoz:
www.jatektan.hu/jatektan/____2012_006/pentomino_ecakkal.pdf

játéktan-JEGYZET / kirakósok:
http://www.jatektan.hu/jatektan/____2012_006/14kirakos.pdf

forrás: Nagylaci http://www.jatektan.hu

„+0,5/-0,5" Segédlet-feladatlap (a csoport minden tagjának, frontálisan vezérelt munka követéséhez)

A téglalapok két egyenlő területű háromszögre oszthatók az átlóval… **kivéve az alábbi 13x5-ös téglalapot**, amelyben a részidomok összehasonlítása igencsak nagy a különbséget mutat a két oldal területe között. ☺



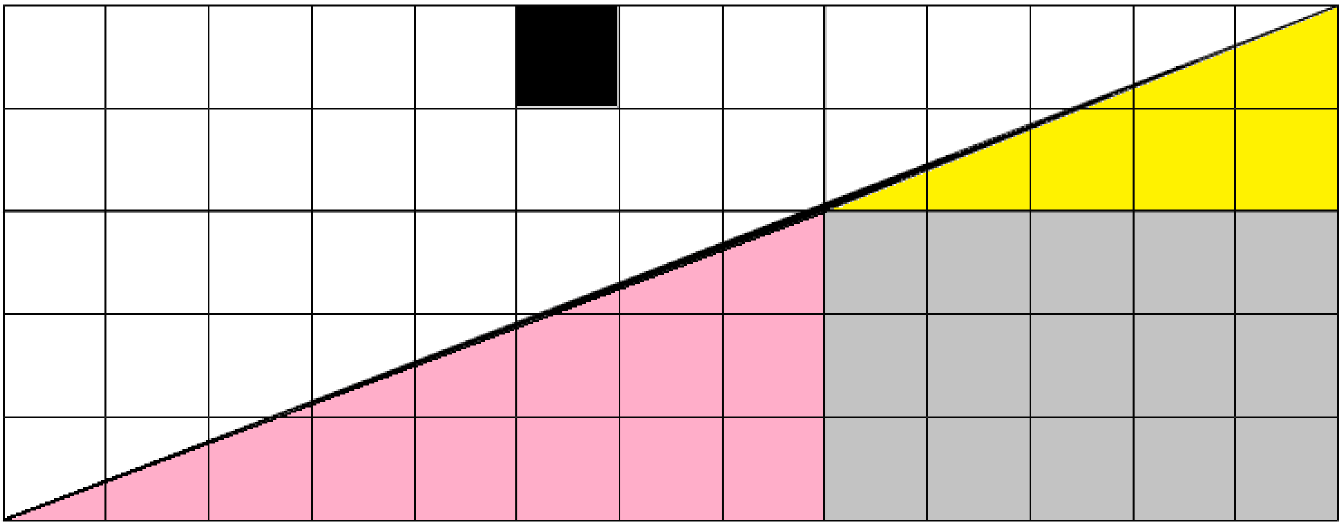
Ismert szólás: „a kivétel erősíti a szabályt", vagy **keressük meg a hibát**?

Nézd a felső ábrát és írd fel tört alakban az alábbi meredekségeket:

Átló:____/____ a nagyobb háromszög átfogója: ____/____ kisebb háromszög átfogója: ____/____

Pontosan kiszerkesztve a meredekségeket, belátható,: **<u>a téglalapot valójában három vonal metszi ketté.</u>**

Ámde! Ennyire csalóka? Ez az iciri-picirinek látszó pontatlanság hogyan eredményezhet ekkora különbséget?



Számoljuk ki az alábbi területeket:

a teljes téglalap: _____ a kis háromszög: _____ a nagy háromszög: _____ az alsó kis téglalap: _____

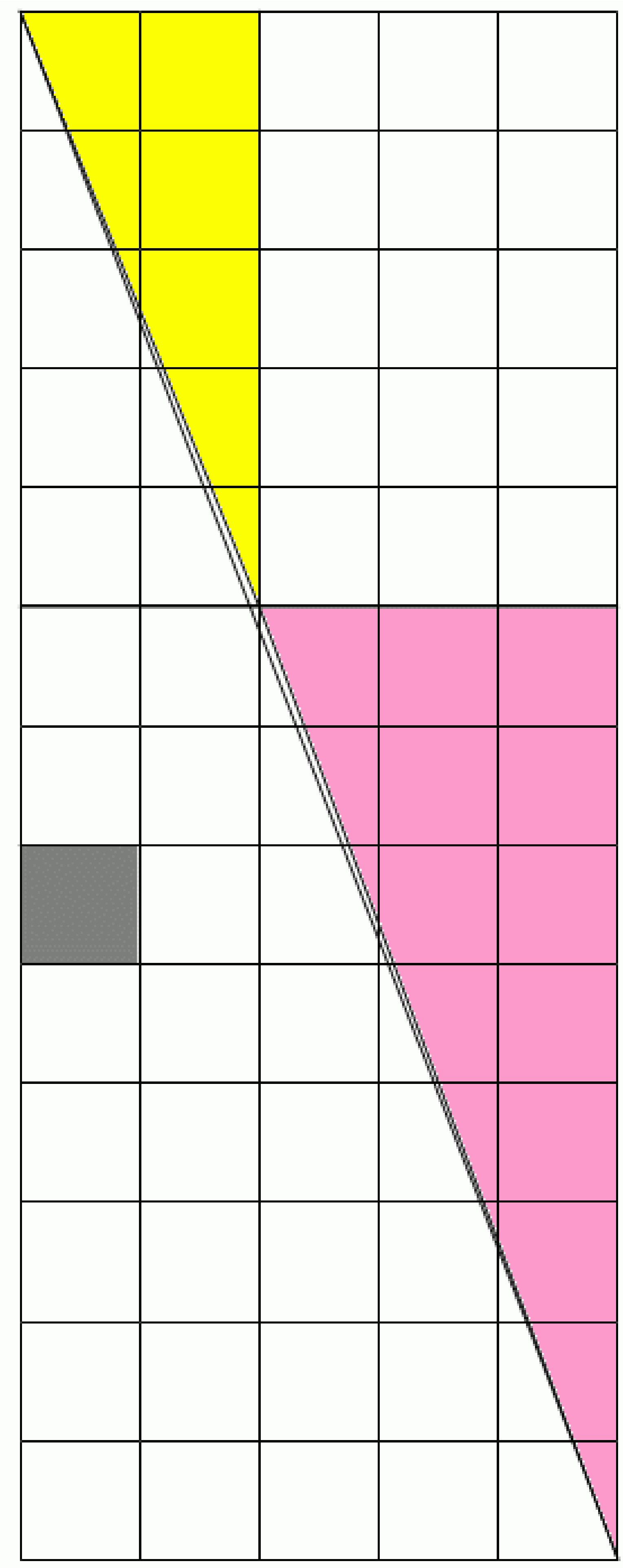
Mennyi a téglalap számított területének a fele:____(1) és mennyi az alsó három idom összes területe: ____(2)

Mekkora (1) és (2) különbsége: ____ és miért kétszereződik meg ez a különbség:

……

forrás: Nagylaci http://www.jatektan.hu

Animátor segédlete **„+0,5/-0,5”**



A téglalap átlójának a meredeksége:

5/13=**0,3846**

A kicsi háromszög átfogójának a meredeksége:

2/5=**0,4**

A nagy háromszög átfogójának a meredeksége:

3/8=**0,375**

(Lásd a nagyított szerkesztést!)

A hiba ugye, a meredekség figyelmes ellenőrzésével, vagy pontosan szerkesztve felismerhető! Ámde!!!...
Ámde!!! Az első pillanatra hihetetlen a mértéke: **ez az icipici eltérés hogyan vezethet ekkora területkülönbséghez?**

Utána számolva, beláthatjuk, hogy „az egyik félből elvett és a másikhoz hozzáadott” hibaterület (ami csak 0,5 egységnyi) megduplázza a különbséget.

A 13x5-ös téglalap fele
13x5=65 >>> 65/2=**32,5**

Ezzel szemben:
az alsó idomok összes területe:
2x5/2 + 3x8/2 + 3x5 = **32**,

azaz a fél területnél 0,5 –tel kisebb,

ami
hozzáadódott (!!!) a felső fél területhez:
(32,5+0,5=33)

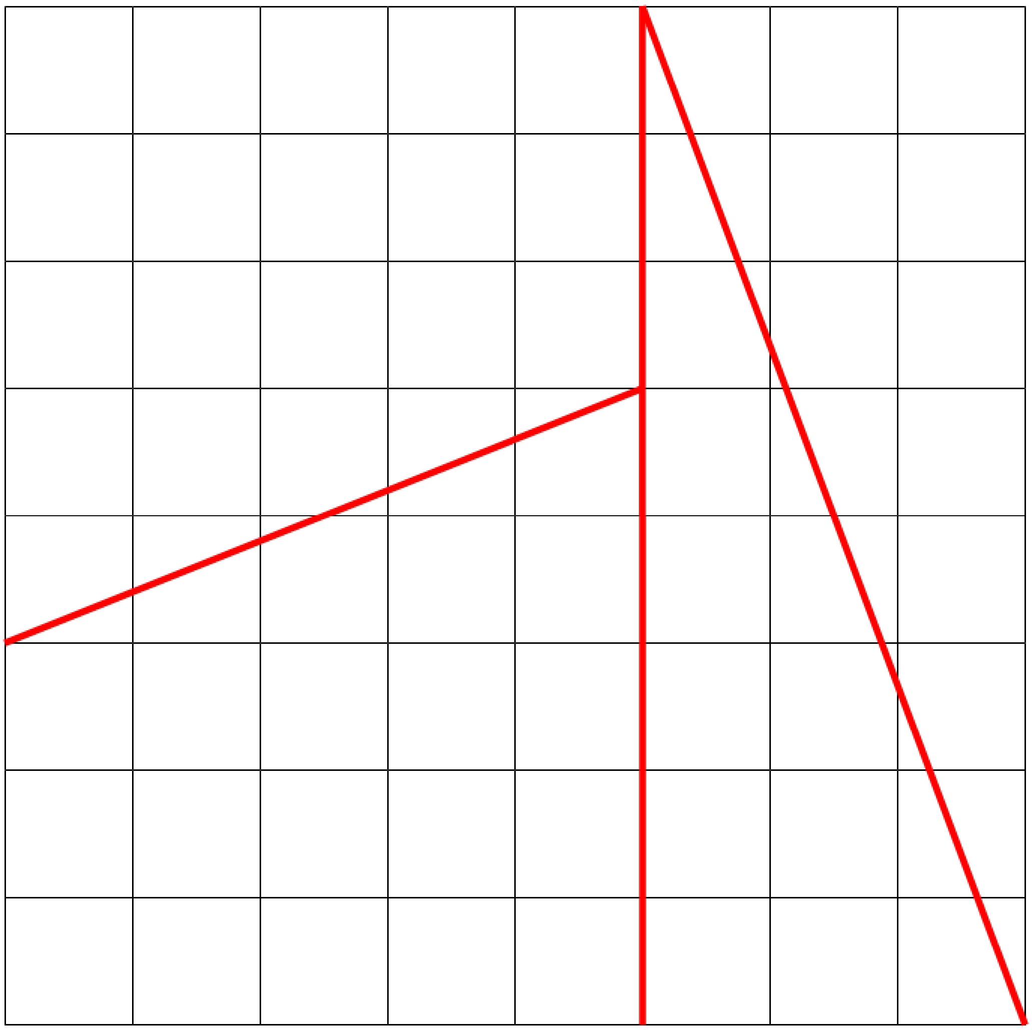
Így lett, a pontatlan szerkesztéssel a két terület: **33 és 32** területegységnyi.

Pisti is Panni is 2-2 almát kapott.
Panni elkéri Pisti almáinak „csak” a felét.
Ha Pisti odaadja, akkor mennyivel lesz több almája Panninak? (Hányszor több almája lesz így Panninak, mint Pistinek?)

forrás: Nagylaci http://www.jatektan.hu

Feladatlap (a csoport minden tagjának, egyéni munkára)

Kirakós verseny (1), egyenlő esélyekkel…
☺



A versenyzők készítsék el a saját készletüket: vágják ki a 8x8-as négyzetet, majd a piros (vastag) vonalak mentén szabják fel négy részre.

Helyezkedjenek el úgy, hogy egymást ne láthassák (pl. körben, egymásnak háttal) és terítsék ki maguk elé a 4 db elemet.

A verseny két fordulóban: 1. előbb egy nagyon könnyű, majd 2. picit nehezebb feladattal.

Aki megoldotta, az a többieket nem zavarva, csendben mindkét kezét feltartva jelezzen.
A bíró mindkét feladatnál feljegyzi majd a megoldók sorrendjét.
Fordulónként: az első 6, a második 4, a harmadik 3, az utána következők 1-1 pontot kapnak.

A két fordulóban kapott pontok szorzata dönt a végső sorrendről.
☺

forrás: Nagylaci http://www.jatektan.hu

Animátor segédlete **Kirakós verseny (1), egyenlő esélyekkel…**

Osszuk ki a feladatlapokat, legyen önálló munka elolvasni, előkészülni, átrendeződni, stb.
Azután is csak pontosítani (ha van felmerülő kérdés), bezárólag pedig: ***No! Akkor elkezdhetjük?***

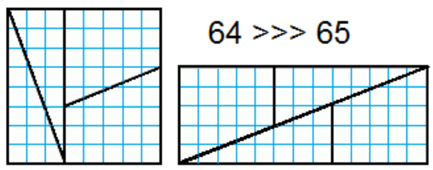
A verseny félrevezetés, gondolat-elterelés, azért a fairplay „körülményesség” részletezése.
(Ami persze, más feladványmegoldó versenyeknél sikerrel alkalmazható.)
A téglalapos feladat után, nagyon jó ellenőrzés:
mennyi idő alatt „esik le a tantusz”, hogy ez bizony ugyanaz, mint amit ezt megelőzően megismertünk.

Szóval, a körülményes nekikészülődés után hiteles szigorral vezessük le a versenyt.

1. ***első feladat: egy hegyes égbeszökő piramis, egy alapjára állított egyenlő oldalú háromszög kirakása.***
(Alig pár másodperc, inkább azzal telik, hogy arra csodálkoznak rá többen, hogy miért ilyen egyszerű…
Amire a hiteles válasz*: **a feladatlapon olvashattátok, hogy „az első nagyon könnyű lesz”. Már most beígérem: a második sem lesz olyan nagyon nehéz**.*)

2. ***második feladat: egy téglalap kirakása.***

Az eredményértékelés és pontösszeszorzás előtt (helyett !!! váltsunk témát és), közösen ellenőrizzük le a 13x5-ös téglalapot elsőként kirakónak a megoldását:



A puzzle-készítésekor egy 8x8-as négyzetből **64** területegységből indultunk. Számoljuk meg a 4 idomból kirakott téglalap területét …
Hogyan van ez? Miért lett most eggyel több: 65 területegység?

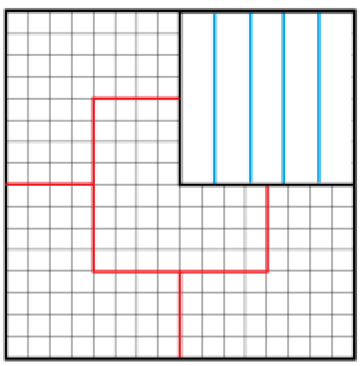
A versenylázon túltéve magukat, visszaemlékezve, többeknek is beugorhat a hasonlóság gyanúja:
Pl.: Ez a téglalap is pont 13x5-ös méretű. Ilyesmiben láttunk szerkesztési pontatlanságot, a csalafintaságot.

Hogyan is van ez most? Nahát! Persze a meredekségek… számoljatok utána…vagy emlékezzetek az átlóra…
Hát persze..., DE!!!
De!!! Sokan még most sem fogják megérteni, ha rákérdezünk:
Hogyan van az, hogy a 8x8-on megszámolt 64 db egységnégyzetes raszter… most a téglalapnál 65 db lett?
Ugyanazok a raszterek, ugyanannyi az egyes elemek területe, mint a szétvágotton… és mégis?
Hogyan lett most eggyel több a négy változatlan elem összes területe?

Idő kell ahhoz, hogy a gyakorlatban is felismerjék az illeszkedés kihagyandó piciny réseit. ***Az egymás mellé pontos precizitással lerakott elemek nem illeszkednek hézagmentesen egymáshoz és ezért: a változatlan területű elemek közötti pici rések összeadódásából keletkezett a területnövekmény.***

Mentegetőzés, nyomatékosítás: ***biztosan felismertétek volna a hasonlóságot, két egymás után mutatott témában, ha most nem a versenyre koncentráltok volna... Akartok még versenyezni? Van még feladat…***

Puzzle-készítő verseny (2)



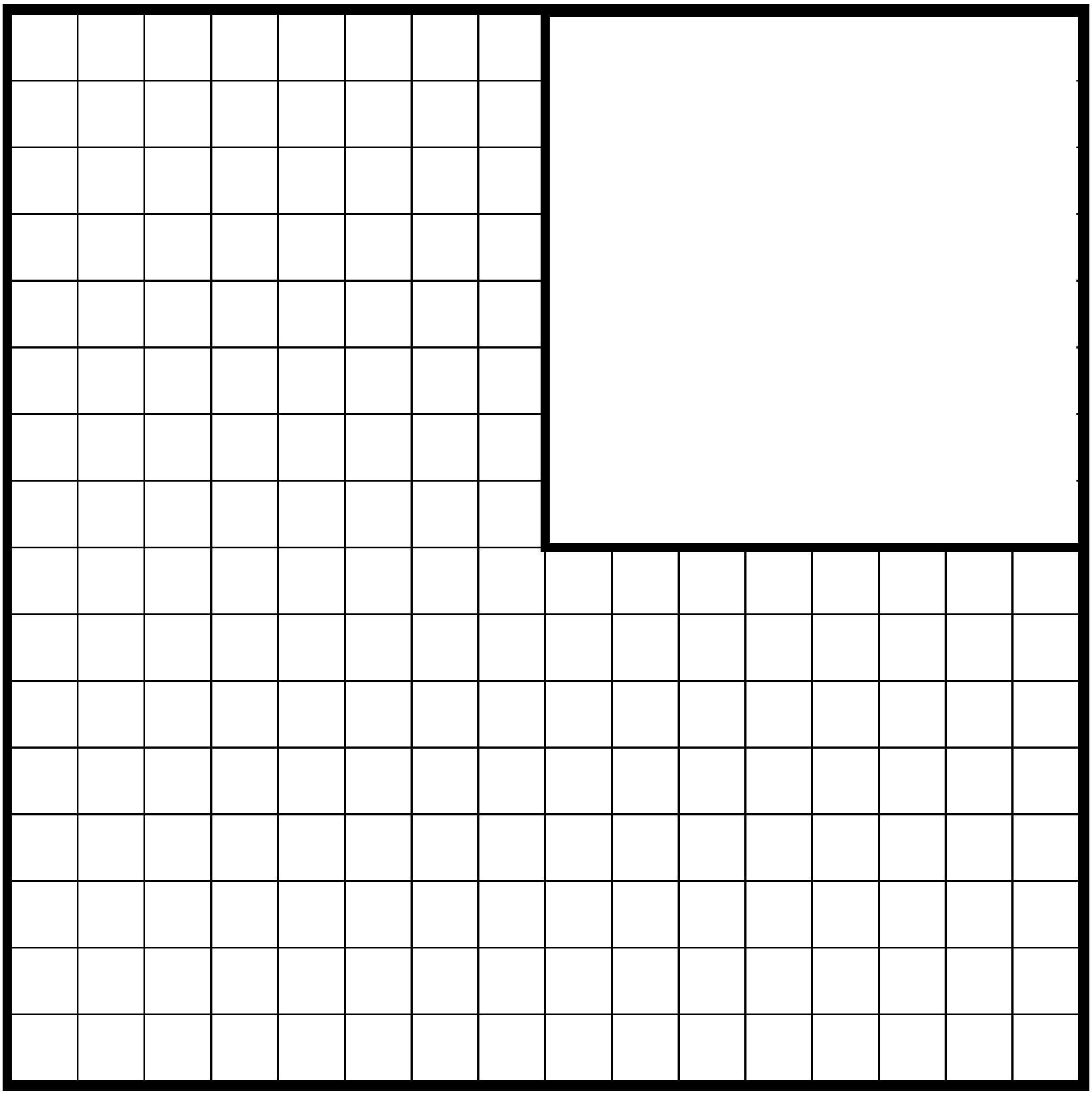
Osszuk ki a feladatlapot, várjuk meg, amíg újra felkészülnek, elrendeződnek…
1. Feladat: ***oszd fel a kicsi „L” területet 4 db egybevágó (méretre is, formára is azonos) részre.*** Majd 5 perc elteltével: 2. feladat: ***Oszd fel a jobb fenti pici négyzetet 5 db egybevágó részre.***

A megoldásból látható az újabb szándékos-tanulságos turpisság:
Most a második feladat megoldása volt kézenfekvő, azonnal behúzható a négy szelő…, ám a vérbeli rejtvényfejtő elme a bonyolult feladat megoldása után, többnyire nehezen talál rá az egyszerű megoldására…

forrás: Nagylaci http://www.jatektan.hu

Feladatlap (a csoport minden tagjának, egyéni munkára)

Puzzle-készítő verseny (2)…



A fenti ábrából készíthető kirakós feladványt nem kell szétvágni, elég ha ceruzával rajzolva megtervezed.

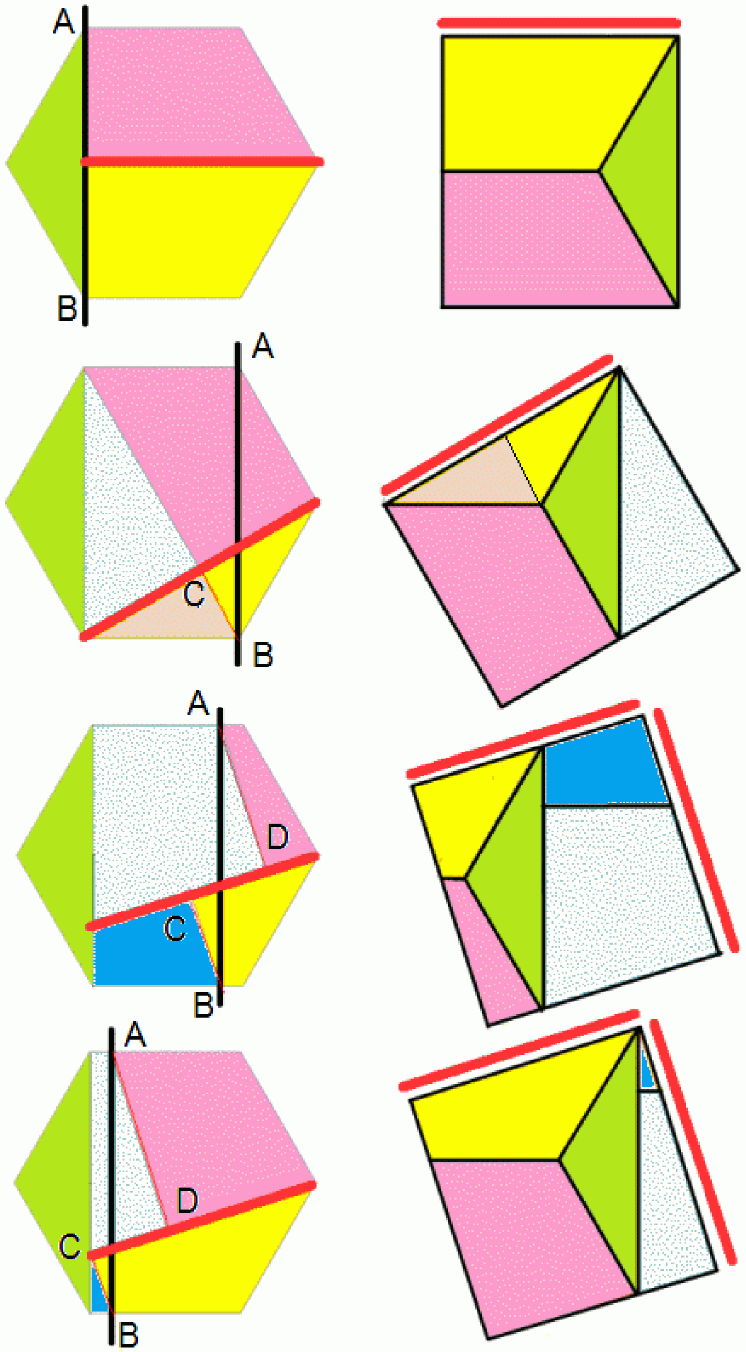
Most is két egymást követő feladatotok lesz, de most a nehezebbel fogunk kezdeni.
Ígérem, ebben a két feladatban nem lesz pontatlanság…, nem lesznek rések, nem változik a terület…
☺
Felkészülésként: számold meg a beraszterezett nagy „L” alakú terület méretét, (hány pici négyzetből áll ?), majd jegyezd fel azt is, hogy a jobb fenti kicsi négyzet területe hány ilyen egységnyi négyzettel fedhető le.

Elő a ceruzát, a radírt… felkészülni! Mindkét feladatra max. 5-5 perc idő lesz. Aki hamarabb elkészül, az kézfeltartással jelezze, fordítsa le a lapját és csendben várja meg a többieket!

Jelezzetek, ha mondhatom az első feladatot!

forrás: Nagylaci http://www.jatektan.hu

Hatszögből négyzet



Hatszögből téglalap mindössze 3 vágással. Figyeljük meg, hogy a téglalap pirossal jelzett oldala **rövidebb** a másiknál.

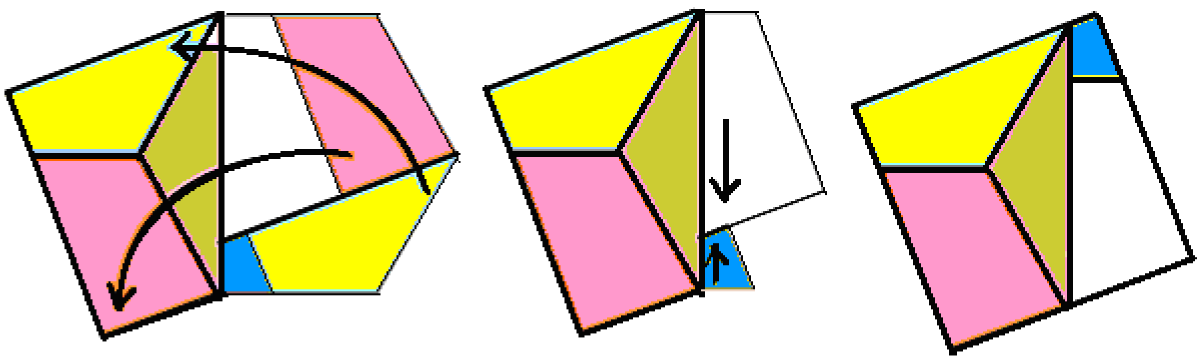
4 db idomra vágva már olyan téglalapot kapunk, amelyben a pirossal jelzett oldal lesz a **hosszabb**.
(A BC-vágás most elmarad.)

A téglalapból akkor lehet négyzet, ha a piros oldal hossza megszerkeszthető.

Ekkor, a hatszög jobb oldali csúcsáról mérve, pontosan kimetszhető a piros szakasz, majd a két szélső érték között bárhol meghúzott "függőlegessel" kijelölve az A és B pontokat, azokból merőlegest húzunk a pirossal jelzett szakaszra…

A darabolást követően pontosan kirakható a hatszög területével, megegyező területű négyzet.

A hatszögelrendezésből kiinduló, forgatás nélküli áthelyezésekkel lépésről-lépésre követhető és ellenőrizhető: az azonos hosszúságú oldalak, az egymást 180 fokra kiegészítő szögek illeszkedése / találkozása…:



A terület változatlan, tehát a „téglalap” másik kiadódó oldalának hossza meg kell egyezzen a „piros”-éval.

forrás: Nagylaci http://www.jatektan.hu

Az egységnyi oldalhosszúságú hatszög területével egyező négyzet oldala kiszerkeszthető.

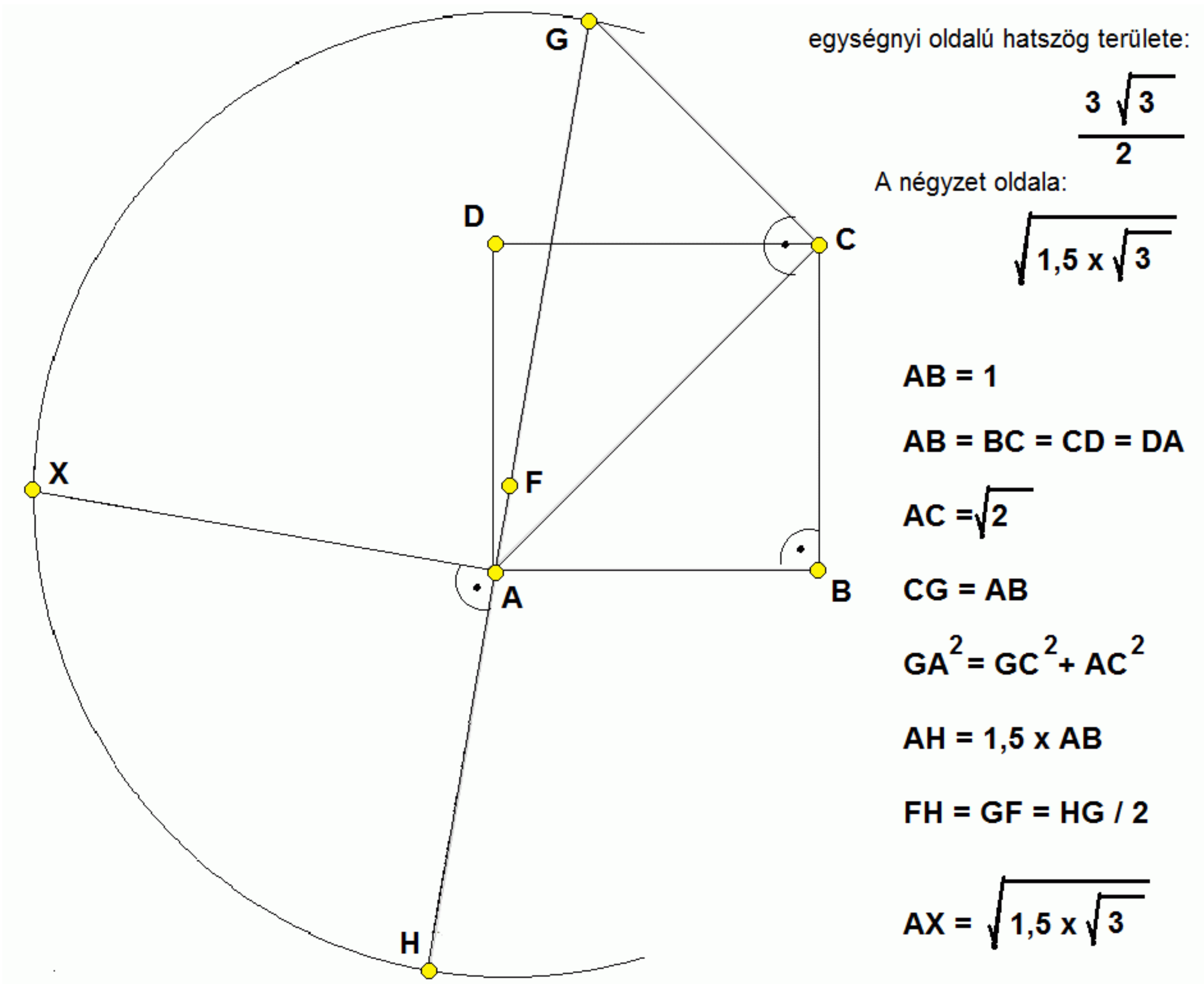
Rajzoljunk egy négyzetet, ennek oldalát tekintsük egységnek.
(Tehát ezzel az oldalhosszúsággal kell majd a hatszöget is megszerkeszteni).

Először szerkesszük meg a √3-at!
Ehhez szerkesszük meg egy √2 (AC) és 1 (CG) befogójú ACG derékszögű háromszöget, amelyre a pitagorasz tételből következőleg: $AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2 + 1 = 3$

Hosszabbítsuk meg a GA szakasz vonalát és mérjük rá négyzet oldalhosszának (az AB szakasznak) a másfélszeresét.

Az így kapott H pont ismeretében már megszerkeszthető a HG szakasz felezőpontja amiből a HG átmérő fölé egy thalesz kört rajzolhatunk. Az A pontból a HG átmérőre húzott merőleges pedig kimetszi azt az X pontot, amellyel: **a keresett négyzet-oldal pontosan az AX szakasz hossza lesz.**

(Miért is?
A derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság mértani középarányosa az átfogó két szeletének, azaz $AX^2 = HA \times AG$ >>> $AX^2 = 1{,}5 \times \sqrt{3}$*)*



(A szerkesztés valamennyi fázisa elvégezhető –mérték nélküli– vonalzóval és körzővel. Az ábra demonstratív jelleggel, szemmértékkel készült, a részletszerkesztések –pl. felezések, derékszög-szerkesztés– mellőzésével.)

forrás: Nagylaci http://www.jatektan.hu