A játékszabályok részletesebb bemutatását lásd még: **>>> Mészáros Mihály: "Egy ősi táblajáték a Mancala"**
A gondolkodási sémáról részletesebben: **>>> Mészáros Mihály: "Taktika-algoritmusok a Mancalában"**

Megjegyzem, köszönettel Misi barátomnak, hogy fenti munkái adtak kedvet nekem is még három, további kapcsolódó gondolatom, lejegyzésére:.

I. Úgy gondolom, akár már alsó tagozatban is érdekes és tanulságos lehet az **óegyiptomi „számtan”**.
Különösen azért, mert magam az ősi mancala-táblákat inkább olyan „ókori számítógépek”-nek tartom, amiket, mint régészeti leleteket, félreértelmezve és tévesen tekintették a kor játékainak…

II. Az „**5 db minta-feladat**” voltaképpen csak az alábbi egyetlen számpélda ínyenceknek:
Hány rekeszes az a (Bantumi-) Mancala-tábla, amelynek a középső rekeszéből 362 db magot szórva, pontosan a szemben lévő rekeszben végezzük?

Jól tudom, hogy rétegigény, de arra is gondoltam, hogy néhány tehetség-gondozó ráharaphat és tanulságosnak találva, továbbadhatja úgy is,mint logikai lánc és úgy is, mint ’eccerűtől’ a bonyolultig..., …egyszersmind bepillantást mutatva egy elegáns számpélda tervezésének örömébe.

III. Az utolsó oldalon folytatólagosan hozzákapcsolt „**Bizonyítás teljes indukcióval”,** már kissé erőszakolt, de…
…de van apropója és a módszer bemutatására, ismétlésére, gyakorlására alkalmasnak találom.

I. óegyiptomi „számtan”

Kb. 50.000 évvel ezelőtt vajon hogyan közölte a barlangba „hazatérő” ősember a társaival, hogy pl. hány állatot látott? Az egynél több kettőre (a sok-sok párt látván) biztosan volt valamilyen szava(-hangja) és talán már a háromra is, de akár bármi hang nélkül is, megmutathatta a keze nyitott ujjaival… Szinte biztos, hogy a gondolkodó-találékony ősünk megtanult 10-ig pontosan számlálni és az eredményt félreérthetetlenül képes is volt közölni (megmutatni). A sokkal többet, pl. a húszat-harmincat…, akár úgy is mutathatta, hogy két kezén kiterpesztett 10 ujjával egymás után többször felemelte a kezét.

Úgy tudjuk, hogy 3-5 ezer éve az egyiptomiak is ilyen, „a megszámlálást követő” sorrendben jegyezték le („írták” le) a számokat, mármint ha azt: a mai szokásunk szerint: balról jobbra haladó sorrendben olvasva értelmezzük. Előbb 1,2,3,…,9, vonalka, (mint az ujjaink), aztán egy jelzés arra, hogy „elfogytak az ujjaink” (ez a tízes jele) és kezdődik újra, újabb vonalkákkal 1-től 9-ig, majd újabb vonalkákkal minden újra kezdésre egy-egy tízes jellel emlékeztetve.

Pl. az óegyiptomiaknál a 24 így nézett ki : **IIII** ∩∩ , a 49 pedig így: **IIIII IIII** ∩∩∩∩

Hoppá! Ezzel már bármely két 10 alatt számot leírva, könnyedén össze tudunk adni és az eredményt írásban is lerögzíthetjük: Pl.: 7 db pálcika meg 8 db pálcika az 5 db pálcika meg egy tízes csomag…
Balról jobbra haladva, pici vonalkákat húzva kezdünk el számlálni, és ha azok darabszáma eléri a tízet, akkor azt a 10 db-ot elhagyjuk, és a törlést egy tízessel jelezzük:

I I I I I I I + I I I I I I I I = ~~I I I I I I I I I I~~ I I I I I >>> I I I I I ∩ (15)

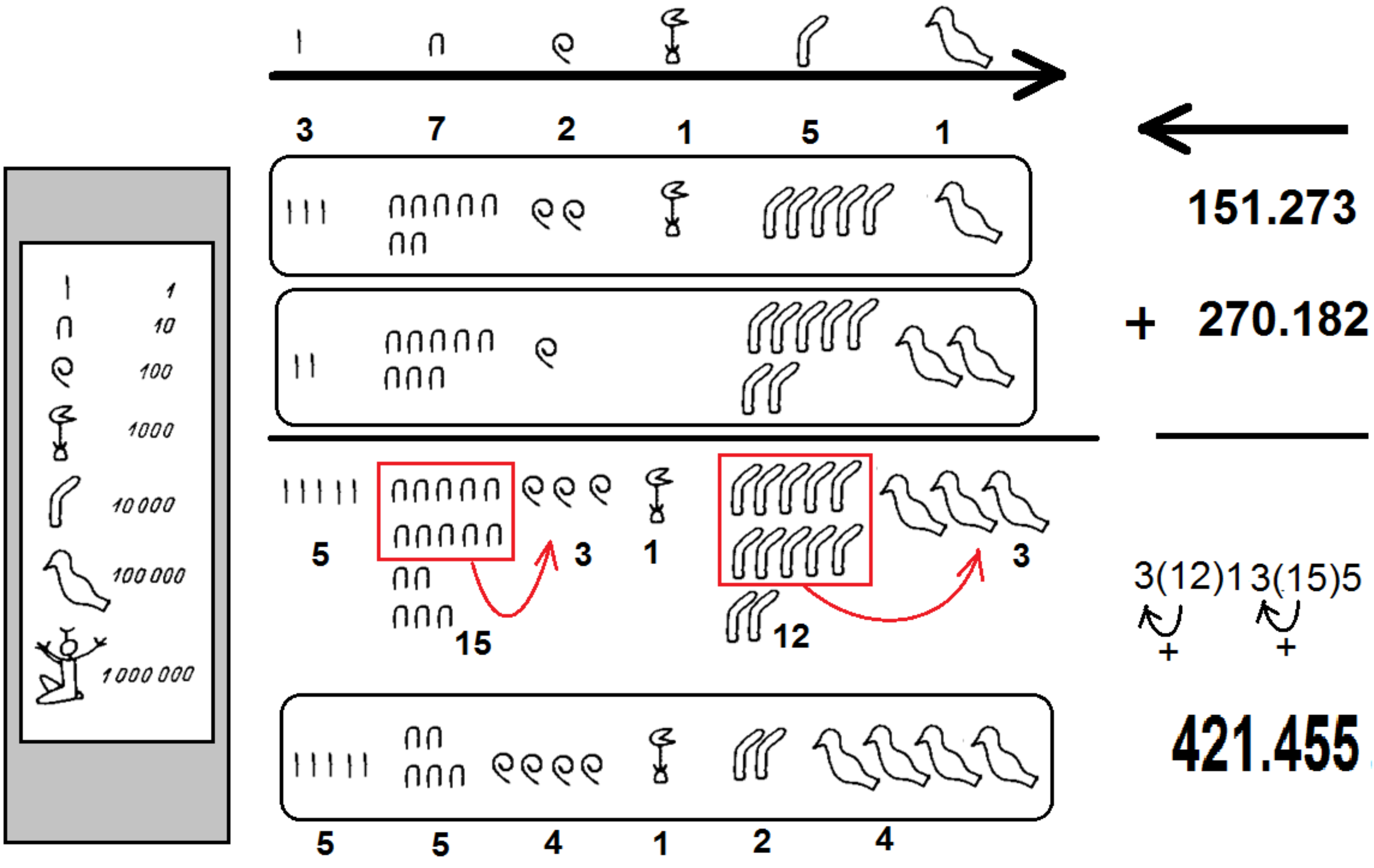
Ha van egy újabb jelünk a 10 db tízes csomagra (ez lesz a százas), meg 10 db százas csomagra (ez lesz az ezres), aztán folytatva tízezreseket, százezreseket mutató jelekkel, akkor már nemcsak leírni tudunk nagyon nagy számokat, de az ujjainkat használva (10-ig számlálva) össze tudjuk adni őket.

A tízig már **számlálni** tudó és a számjegyeket 1-től 9-ig már felismerő nagycsoportos óvodások is képesek tetszőlegesen nagy számokat összeadni úgy, ahogy azt már az ókori egyiptomiak is tették.

I./a óegyiptomi algoritmus számok összeadására

15.273 + 124.182 =? Kövesd az ábrán az alábbi 5 pontban jelzett algoritmust

1. Fordítsd le a (bal oldalon mutatott) óegyiptomi jelekre egymás alá a két szám egymást követő arab számjegyeit, de balról-jobbra, megfordított sorrendben: 37251 (felső) és 281042 (alsó).
2. Húzz egy vonalat és alatta másold össze a vonal feletti azonos (képű) jeleket.
3. Azokat a jeleket hagyd el, amelyekből így tíz lett, és a tőlük jobbra eső szomszédos jelekhez rajzolj hozzá még egyet.
4. Írd le (a megszokott arab számokkal) minden képi jel alá, hogy hány darab van belőlük.
5. Az összeadás eredményét megkapod, ha a 4 alatti számjegyeket fordított sorrendben, jobbról balra lejegyzed.



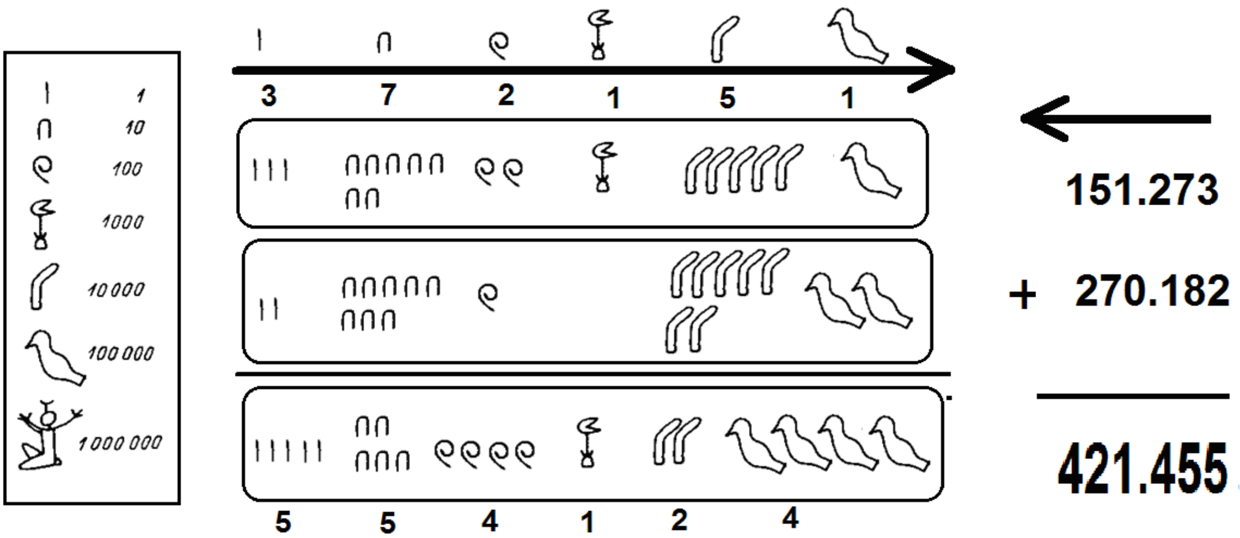
Magam, igencsak elképzelhetetlennek tartom, hogy ilyen meglehetősen munkás, rajzos-képes, módon történt volna az összeadás, bár biztosan akadt volna hozzá néhány ügyes-rajzolós kezű rabszolga. Ámde! Mennyivel gyorsabb és egyszerűbb az, ha előkapunk pl. egy Mancala-táblát és annak rekeszeibe… pl. (átmászkálástól mentesített, v. döglött) skarabeuszokat rakosgatunk…
☺

(Lásd majd a **kivonás-algoritmust**, amilyen talán sumérok „bevétel kiadás könyvelése" lehetett?)

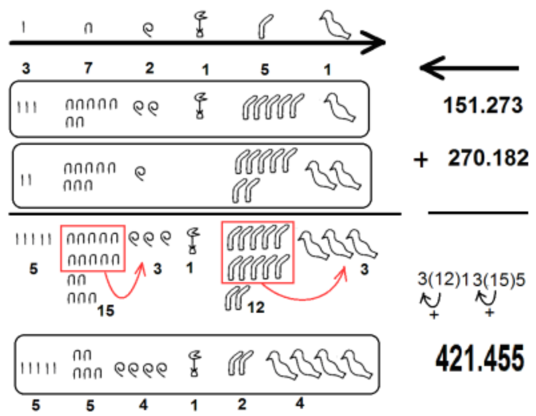
A régészeti leletekből úgy „tudjuk", hogy ekkor már voltak mancala-játékok!!! Magam, csak azon gondolkodtam el, hogy vajon mi lehetett előbb: a játék, vagy a „kor számítógépe". Logikusan, írásos-meggyőző bizonyítékok emlékek hiányában, magam arra is gondolnék, hogy az utókor „kreatív okoskodóinak" volt vagy 3-5 ezer éve arra, hogy elfantáziálgasson…, és utólagosan kitaláljon „ősi játékszabályokat"…, majd a „fontoskodó" publikációk, egymást idézgetve, valósággá erősíthették a tévhiteket.
Lételemem a kételkedés. (Különösen napjaink internetes „szénakazlának hamis aranytűiben"…)

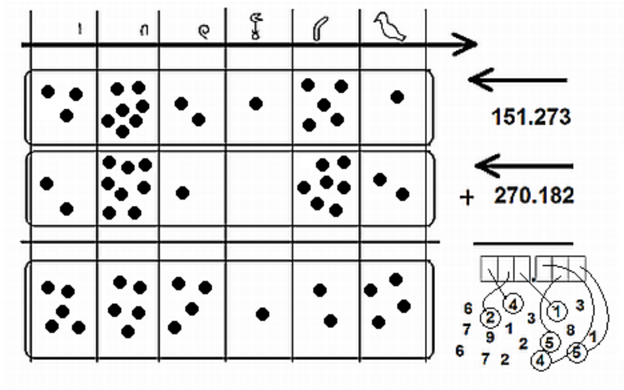
Nagylaci (http://jatektan.hu)

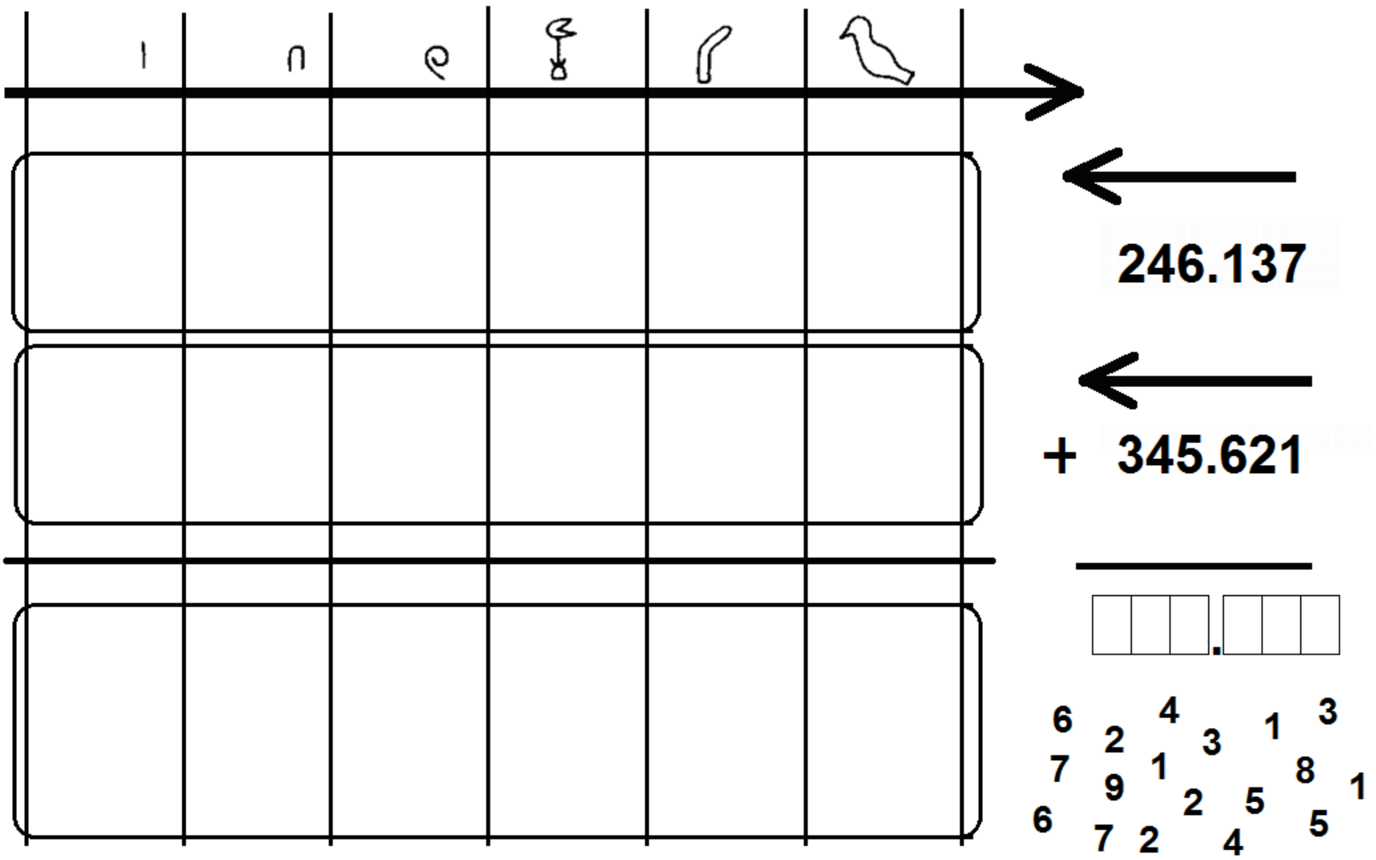
Feladatlaposan…



Felső képet átbeszéljük, alatta áttérünk a pöttyös ábrázolásra, lent pedig a megoldandó…







Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

Már én is tudok (akár két nagyon nagy számot is) összeadni.

A minta (algoritmus) lekövetése:

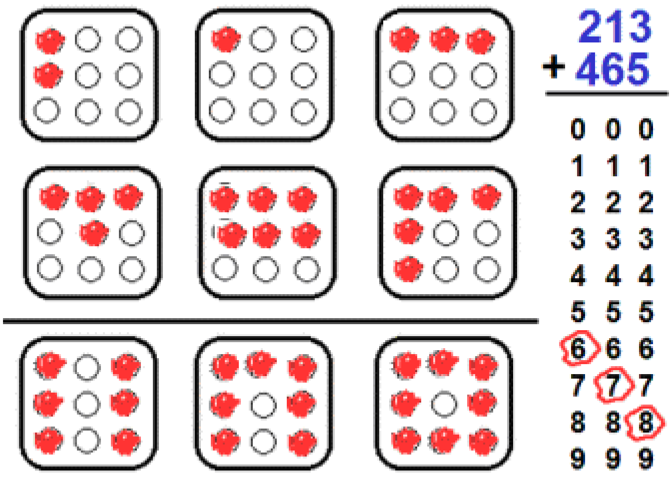
1. Az arab számokat „átfordítjuk” pöttyös ábrázolásra.
2. Megszámláljuk a felső két sor (az összeadandók) az összes pöttyeit.

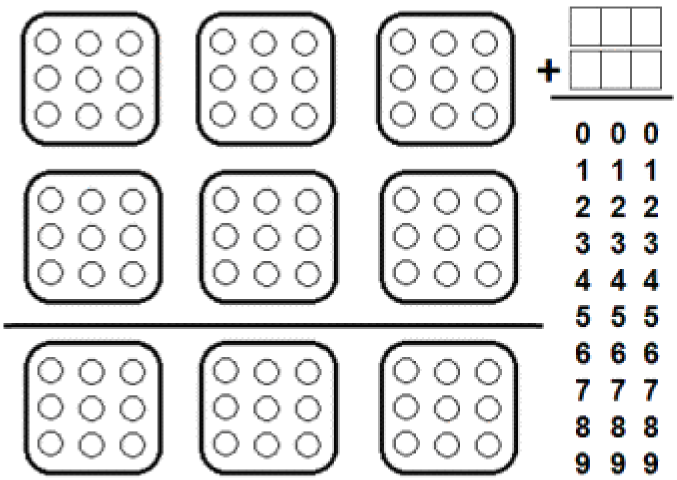
3./a Ha a számlálásban 9-ig jutottunk, akkor újra kezdjük 1-től, de előbb a balra beszínezünk egy pöttyöt.

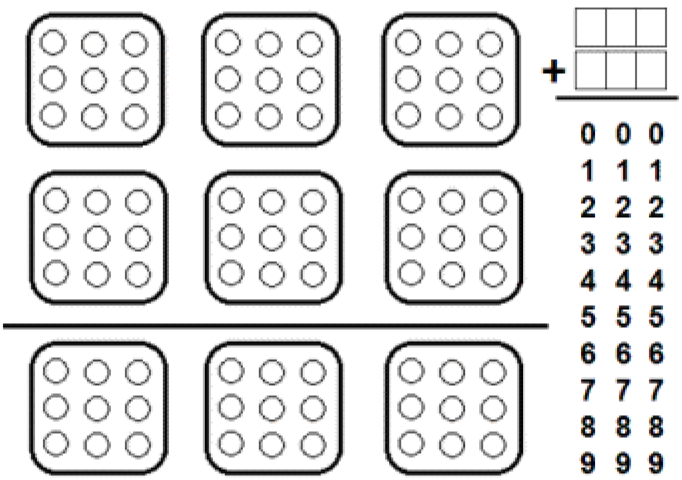
3./b Az alsó (eredmény-) sorban bejelölünk annyi pöttyöt, ameddig eljutottunk a számlálásban.

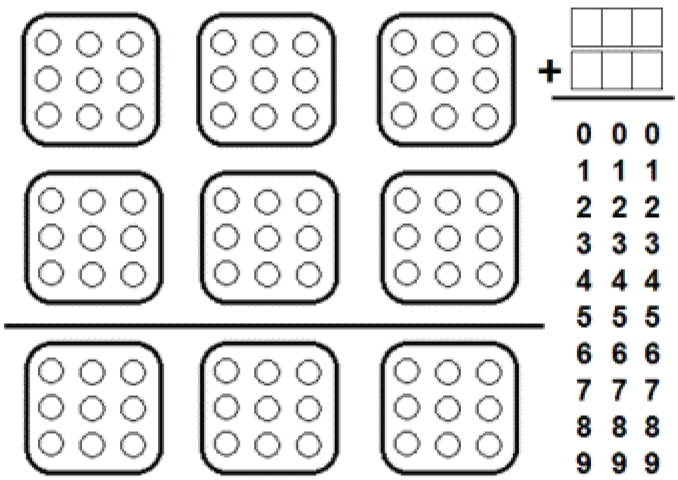
4. A pöttyökkel kiszámolt eredményt „visszafordítjuk” arab számokra.

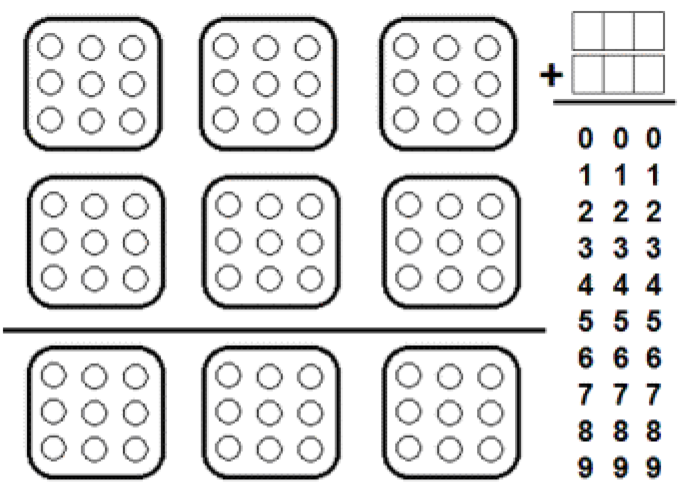
Azt is vegyük észre, hogy ezzel a módszerrel akármilyen hosszú számsort (óriási nagy számokat is) össze tudunk adni.
„Kimondani még nem tudom, arabusos számjegyekkel leírni is csak nagyon girbegurbán, de összeadni azt már IGEN.”

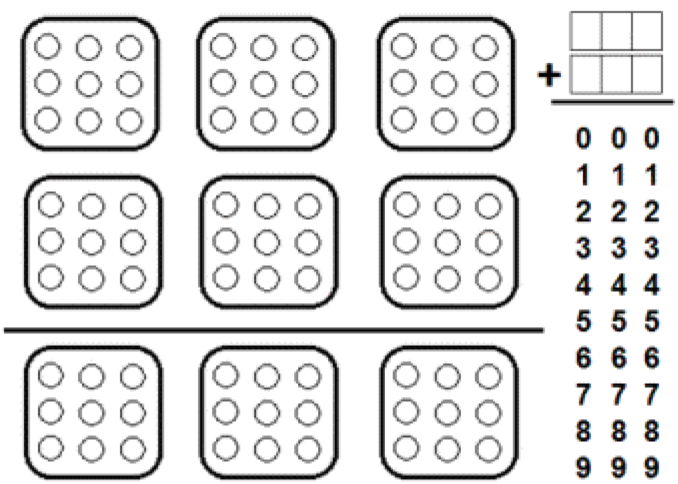












(Sokszorosítás előtt, ne feledd beírni az összeadandókat!)

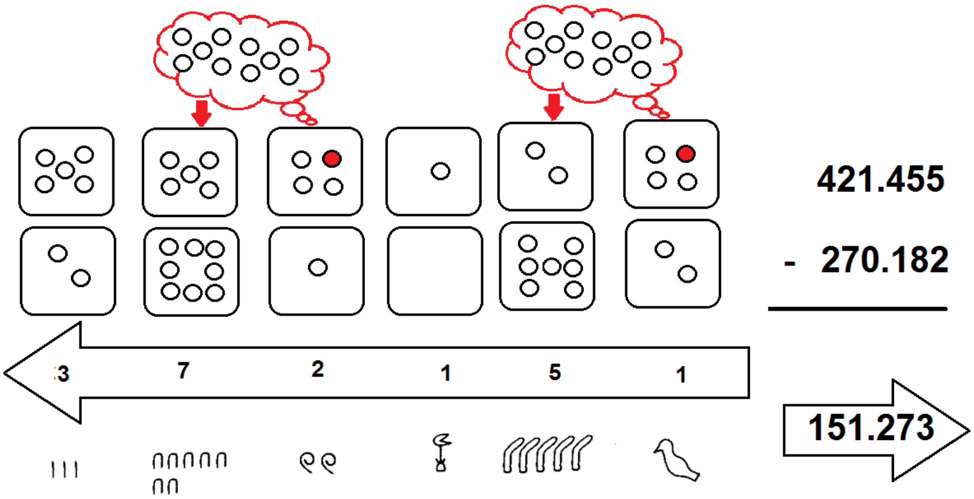
Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

I./b sumér (v. óegyiptomi?) kivonás-algoritmus (2x6-os mancala-táblán magokkal)

Az összeadásnál megismert fordított sorrendben (balról jobbra az egyesekkel kezdve) „írjuk bele” a számjegyeket (most belerakott magokkal helyettesítve) a tábla rekeszeibe. A felső rekesz-sorba a kisebbítendő, az alsóba a kivonandó számot.

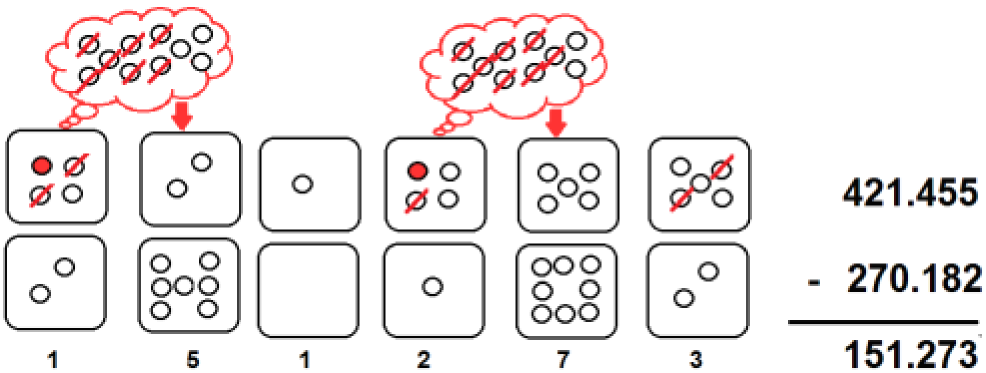
Algoritmusunk, most a következő:

1. Abba a felső rekeszbe, amelyikben kevesebb van, mint az alsóban, oda tegyünk be 10 db-ot, és a tőle jobbra állóból vegyünk ki egyet.
2. Mindegyik felsőből rakjunk át az alatta lévőbe annyit, amennyi annak a tartalma…
3. A fent megmaradókat „könyveljük le” óegyiptomi jelekkel, majd fordított sorrendben arab számokkal („fordítsuk le a ma megszokott helyiértékes arabszámosra”).



Hát nem sokkal egyszerűbb ez így? Már csak azért is, mert nem vagyunk fáraók korában, ugyan minek-kinek rajzolgatnánk feleslegesen… Elegendő, ha csak az eredményt (fordított sorrendben) arab számokkal leírjuk.

Aztán persze, ezt az ide-oda számjegy sorrend-fordítgatásosdit is elhagyhatjuk egy „tükrözéssel”:



1. Abba a felső rekeszbe, amelyikben kevesebb van, mint az alsóban, oda tegyünk be 10 db-ot, és a tőle ~~jobbra~~ balra állóból vegyünk ki egyet.
2. Mindegyik felsőből rakjunk át az alatta lévőbe annyit, amennyi annak a tartalma…

Egy 2x6 rekeszes Mancala-készletet használva akár egy ovis is betanítható az algoritmusra és képes összeadni, kivonni a számára még óriási-értelmezhetetlenül nagy számokat egészen 999.999-ig, ha már 9-ig ismeri a számjegyeket. *Sikerélmény lehet: kalkulátoron* ***képileg leellenőrizni*** *a „kimondhatatlan” eredményt.*

Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

I./c Ha már számolunk… Tudod-e, hogyan szoroztak az ókori Egyiptomban?

Összeadni tudtak és akkor ugye a „szorzás = ismételt összeadás”. *„Ha összeadni tudok, akkor szorozni is!”*

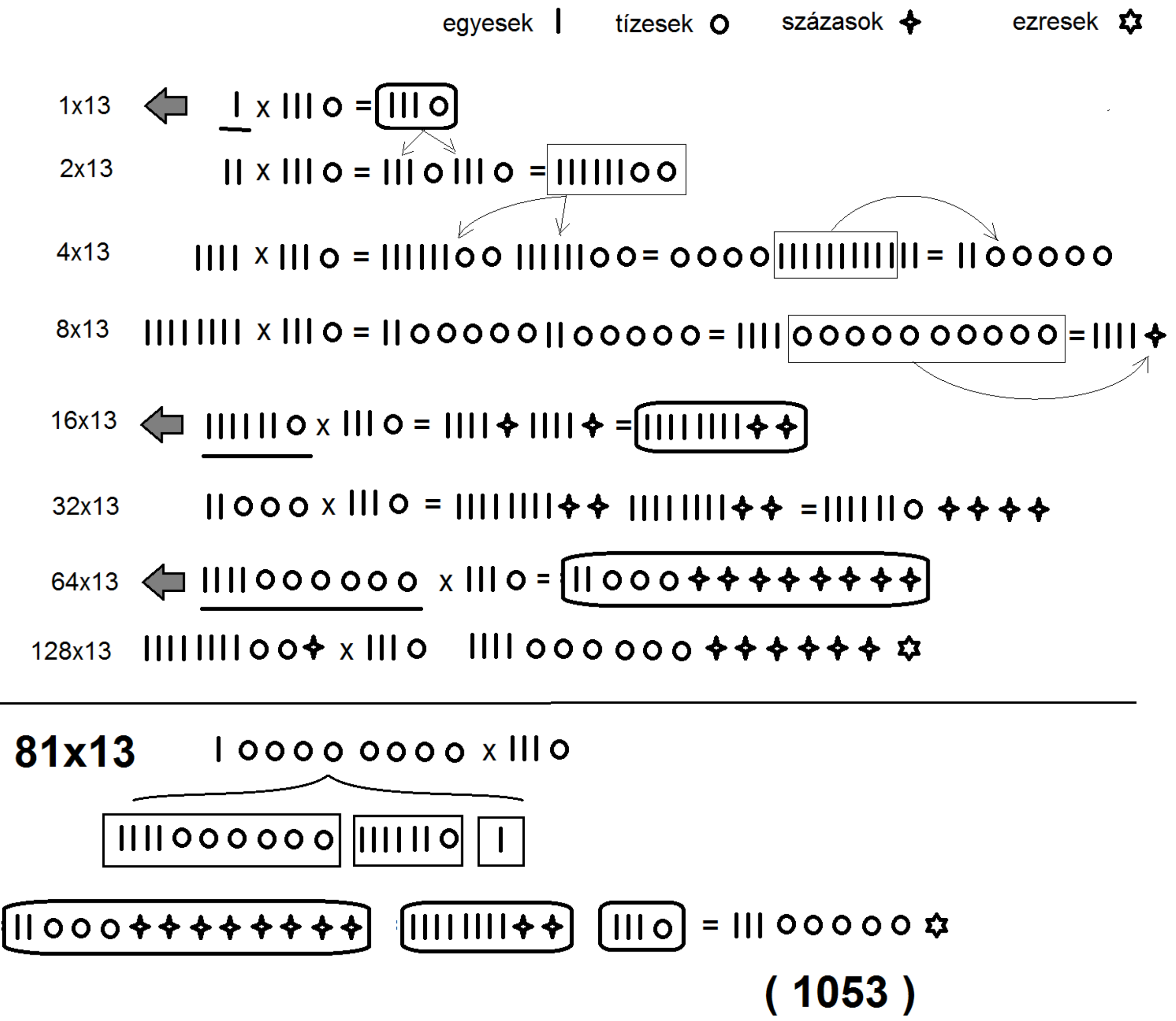
Pl.: **81x13=?**

Megtehették volna, hogy 13-szor leírják egymás alá a 81 óegyiptomi számképét és elvégzik a (sok-sok tízes-átlépéssel, sok-sok munkával) az összeszámlálásokat.

Ámde, úgy szoktam mondogatni: „a jó matekos olyan okos lusta, aki gondolkodik, keresi a kevésbé munkás megoldásokat”. *Megjegyzem, én úgy tudom, hogy még az ókori Rómában is, mi több: még a középkor elején is: a sokat könnyítő-egyszerűsítő „duplázásos technikával” szoroztunk, aminek az alapjait az ókori Egyiptomból örököltük.* ***(Magam, a rómaiak „kreatív lustaságának” tudom be az 5>V, 50>L, és a 9>IX, 8>VIII, stb.”felfedezését” is…, hogy legyen már elég 3-szor… ugyanazt a jelet…)***

Készítsünk összeadással egy „**duplázásos szorzótáblát”**, pl.: most a 13-ra, aminek minden sorában, az előző sor kétszerese szerepeljen (azaz: az előző sor önmagával történő összeadásával)!

A tábla három vastagon keretezett részében: **1x13 + 16x13 + 64x13 = 81x13** ! Tehát nem 81-szer kell összeadni a 13-at, hanem csak a rá vonatkozó szorzótábla három sorának az eredményét:



Megpróbálnád? Pl.: a szorzótábla felhasználásával számold ki a **11x13** szorzás eredményét!

Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)

Így szorozhattak az ókori rómaiak?

Nem tudom, több, mint 50 éve, hogy rácsodálkoztam a trükkre…
Most már úgy tudom, (vagy ebben is tájékozatlan vagyok) az ókori Róma matematikája nem sokat tett hozzá szellemi örökségünkhöz. Szorozni meg? Az „óegyiptomi duplázásos algoritmust” még a középkorban is használtuk…
Az 5 és 10 közötti számokra azonban au eredet pontos ismerete nélkül is jó mankó az alábbi:

9 x 7

9 - 5 **7 - 5**

Mindkét számból vonjunk le 5-öt és mutassuk meg kinyújtott ujjainkkal az eredményt !

4 + 2

= 6 **x 10 = 60**

1 x 3 **= 3** **+ 3**

63

A nyitott ujjak összege adja a tízeseket

A zárt ujjak szorzata adja az egyeseket

☺

$$10x[(X-5)+(Y-5)] + (10-X)x(10-Y)= XxY$$

$$\cancel{10X}-\cancel{50}+\cancel{10Y}-\cancel{50} + \cancel{100}+XxY-\cancel{10X}-\cancel{10Y}=XxY$$

Picit átvariálva, ugyanez…

egy Mancala-játék segítségével működik pl. a 10 és 20 közötti számokra is.

Pl. **17 x18=?** Rakj két felső rekeszbe 20-17=3 db és 20-18=2 db magot.
Általánosan: annyit, amennyivel kipótolhatók a számok 20-ra! Ezek lesznek a „felsők”.

A két alsó rekeszbe pedig rakj 17-10=7 db és 18-10=8 db magot.
Általánosan: mindkettőből vonj le 10-et! A maradékok lesznek az „alsók”.

A két alsó összegének a kétszeresét szorozd meg 10-zel.
[ez ugye a példánkban (7+8)x2x10=300]
és ehhez add hozzá a felső kettő szorzatát.
[ami a példánkban 3x2=6]

300+ 6 =306= 17x18

Hogyan is van ez? Pici algebra: (20-X) x (20-Y) + (X-10 + Y-10) x 2 x 10=X x Y

Forrás: Nagylaci (http://jatektan.hu)