

Hogy is van ez a logikai kitalálósdi játék:

<http://jatektan.hu//jatektan/zz2006/algebra.html>

Oldjunk meg egy feladatot. Találjuk ki a kör, a négyzet és a háromszög értékeit!

Hamar észrevesszük a „trükköt”, amivel gyorsan kiszámolhatók az ismeretlenek.

A piros oszlopban egy háromszöggel van több, mint a kék sorban, tehát:

a piros oszlop és a kék sor különbsége pont a háromszög értéke: $59 - 46 = 13$

Hasonlóan: „piros” – „felső sor” = 16 (*****), ami a négyzet értéke és

a „középső oszlop” – „felső sor” = 14 (****), ami ugye a kör értéke.

			43
			44
			46
			42
59	57	59	

Nézzük ezt a másikat!

Megértettük már, hogy minden sor és minden oszlop valamilyen összefüggést ad a 3 db kitalálandóra, azaz **3 ismeretlen**-re.

			39
			27
			30
			45
41	50	50	

A/

			39
			27
			30
			45
41	50	50	

/B

			39
			27
			30
			45
41	50	50	

C/

Ha jól sikerül közel azonos tartalmú sort és oszlopot választanunk, akkor kevés számolással ismert lesz valamelyik meghatározandó ismeretlen. Lásd három féleképpen is:

- (***) Az **A/** ábrán látjuk: a kékből levonva a pirosat, pont 1 db kör marad, aminek az értéke: $50 - 39 = 11$
- (**) A **B/** ábrából meg azt, hogy: ha a pirosból levonjuk a kéket, akkor is 1 db kör marad... $41 - 30 = 11$
- (*) A **C/** ábrából is ugyanez az eredmény: A pirosban összesen 3 db háromszög és 3 db kör van: $27 + 30 = 57$, a kékben pedig ennek pont a harmada, meg még egy kör, azaz 1 db kör = $30 - 57 / 3 = 11$

A módszert „mérlegelv”-nek nevezzük: Ha 2 db kétkarú mérlegre tett valamik egyensúlyban vannak, akkor a 2 mérleg jobb- és bal-oldali serpenyőinek tartalmát összeadva, (vagy kivonva, vagy összeszorozva is) fennmarad az így megváltozott tartalmak súly-egyenlősége.

Hú!!! Mindent értünk, DE...!!!

...DE Nem lehetne eztetetetet valahogy egyszerűbben rövidebben megfogalmaznunk?

Jelöljük pl. a kört x-el, a négyzetet y-nal, a háromszöget z-vel és alig 5 sorban leírhatjuk az információkat:

$$\begin{aligned}
 (*****) \quad z + 2y + x &= 59 \quad \text{és} \quad z + y + x = 43 \quad \text{tehát} \quad 59 - 43 = 16 = y \\
 (****) \quad 2x + y + z &= 57 \quad \text{és} \quad z + y + x = 43 \quad \text{tehát} \quad 57 - 43 = 14 \\
 (***) \quad 3x + y &= 50 \quad \text{és} \quad 2x + y = 39 \quad \text{tehát} \quad 50 - 39 = 11 \\
 (**) \quad 3x + z &= 41 \quad \text{és} \quad 2y + z = 30 \quad \text{tehát} \quad 41 - 30 = 11 \\
 (*) \quad 3x + 3z &= 57 \quad \text{és} \quad 2x + z = 30 \quad \text{tehát} \quad 30 - 57/3 = 11
 \end{aligned}$$

Az algebrában x,y,z jelöljük az ismeretleneket, a köztük és az ismertek közötti összefüggést pedig **egyenletek**kel írjuk le.

Számoljuk meg, hogy a kitalálós játék mindegyik ábrájából 7 egyenletet írhatunk fel:

4-et a sor- és 3-at az oszlop-összegekre.

Ha ezekben ugyanazok az ismeretlenek szerepelnek, akkor ezek egymással összefüggenek, azaz:

rendszer, algebrai kifejezéssel mondva: **egyenletrendszer** alkotnak.

Lássuk be, hogy csak akkor tudjuk kiszámítani az ismeretleneket, ha legalább annyi egyenletet tartalmaz a rendszer, mint az ismeretlenek száma.

A legegyszerűbb három-ismeretlenes „egyenletrendszer” 3 db értékadás pl.: $x=1, y=5, z=12$

Ha több egyenletünk van mint az ismeretlenek száma, akkor vagy

ellentmondás van bennük: lásd pl. $x=1, y=5, z=12, x=1200$????, „azaz értelmezhetetlen, vagy

nem függetlenek egymástól az egyenletek: $x=1, y=5, z=12, 2x=2; 100x=100$ amik ugyan nincsenek ellentmondásban, de egyikből következik egy másik is.

Lássuk be azt is, hogy az $x + y + z = 30$ nem jelent többet, mint a $2x + 2y + 2z = 60$!

Ezek, gyakorlatilag is és elméletileg is ugyanazt az információt adják, egyik sem „mond” többet a másiknál. („**Ekvivalensek**”, mint a kabarétréfában: „maga mindent kétszer mond? Mindent kétszer mond?”)

Az alábbiakból a (3.) ugye „felesleges”, hiszen nem több, mint az (1.) és (2.) megfelelő oldalainak összeadása:

(1) $2x + y = 10$, (2.) $y + 2z = 20$, (3.) $2x + 2y + 2z = 30$

Ha azt mondom két alma és egy körte ára összesen 10, egy körte és két szilva ára pedig 20, akkor tudom azt, hogy 30-ért kapok kettőt-kettőt mindegyikből, anélkül is, hogy erre külön felhívják a figyelmemet. A harmadik egyenlet tehát nem mond többet az első kettőnél így kevés az információm ahhoz, hogy kikövetkeztethessem melyiknek mennyi is az ára.

Gyakorlásként, írjuk fel x, y, z jelölésekkel az ábrából kiolvasható egyenleteket

			39
			27
			30
			45
41	50	50	

$2y + z = 39$

$2x + y = 27$

$x + 2y = 30$

$y + 2z = 45$

A három ismeretlenre 7 összefüggésünk is van!

Amiből 3 is elég a meghatározásukhoz. Pl.:

A kékekkel írtakból y és z kiszámolható:

az „egyikből kifejezem (!) $z = 39 - 2y$ és a másikba

behelyettesítem” $y + 2(39 - 2y) = 45 \gg \gg -3y + 78 = 45$

$y = 11$, és (!) $z = 39 - 2 \times 11 = 17$

majd a pirosból $\gg \gg x = 41 - 3y = 8$

$x = 41 - 3 \times 11 \gg \gg x = 8$

$41 = x + 3y$

$50 = 2x + 2z$

$50 = 3y + z$

☺☺☺ A másik négy (zölddel írt) egyenletet nem használtuk fel, de a korrekt megoldáshoz hozzá tartozik az is, hogy „behelyettesítéssel” leellenőrizzük ezeket is, hogy nem hordoznak-e ellentmondást.

☺☺☺ A progi különleges érdekessége, hogy (a nem ellentmondásos, de) az információt ismétlő egyenletek közül „okosan” válogathat a játékos!

Olyan sor-, vagy oszlop- párokat keressünk tehát, amelyekben sok azonos tag van.

Ha ilyenek összegeinek képezzük a különbségét, akkor (jó választás esetén):

a három ismeretlenből csak egy marad, ami könnyen ki is számítható.

			39
			27
			30
			45
41	50	50	

$$\begin{array}{c}
 \text{Y} \\
 \text{X} \\
 \text{Y} \\
 \text{Y}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{Y} \\
 \text{Y} \\
 \text{Z}
 \end{array}
 -
 \begin{array}{c}
 \text{Z} \\
 \text{X} \\
 \text{X} \\
 \text{Z}
 \end{array}
 \Big/ 2 = 6 \text{ Y}$$

$[41 + 50 - 50 / 2] / 6 = y$

Ismétlésként, összefoglalva, mi mindent ismertünk meg ezzel a játékkal:

Több ismeretlenes (elsőfokú) egyenletrendszer...

Ismeretlenek jelölése, ekvivalencia, függetlenség, túlhatározottság, ellentmondásosság...

Annyi egymástól független egyenlet, ahány ismeretlen...

Alkalmaztuk a „mérleg”-elvet...

Ízlelgettünk egy egyenletrendszerrel megoldható egyszerű szöveges feladatot...

Következő lépésekben folytathatjuk pl. „paraméterek” bevezetésével, amikor a sor és oszlop-összegekre nem számokat, hanem betűket adunk meg és azokkal jelezzük az elvégzendő műveleteket.

Eljuthatunk általános megoldáshoz, felismerhetjük a determináns-technika lényegét automatizmusát...